電158 電気数学I
第5回
1次変換 (線形変換, 線形写像) (2)

電 158 電気数学 I 2013 年度前学期 琉球大学工学部電気電子工学科 (夜間主コース) 担当: 半場

2 次元数ベクトルの「積」(1) (教科書に記述なし)

- ベクトルの演算: たし算とスカラー倍
- 3 次元数ベクトルではベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ が定義される

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

- 2 次元数ベクトルに違う形の積を導入 (仮に ★ と書く)

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{a} \bigstar \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 - a_2 b_2 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

2 次元数ベクトルの積「★」(2) (教科書に記述なし)

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{a} \bigstar \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 - a_2 b_2 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

▷ 何がやりたいか

- 2 次元数ベクトルに積「★」を追加したものは複素数全体と同じもの
- $\boldsymbol{e}_1$ 方向の部分ベクトル空間が「実数全体」
- $\boldsymbol{e}_2$ は「虚数単位 i」, 高校数学で「2 乗すると -1 になる新しい数」として導入されたものと一致

2 次元数ベクトルの積「★」(3) (教科書に記述なし)

▷ 積「★」の性質の確認 (1)

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 \\ a_1b_2 + a_2b_1 \end{pmatrix}}$$

- $\boldsymbol{b}\bigstar\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} b_1a_1 - b_2a_2 \\ b_1a_2 + b_2a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 \\ a_2b_1 + a_1b_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{b}$

  積 ★ は可換, ベクトル積と違う

2 次元数ベクトルの積「★」(4) (教科書に記述なし)

▷ 積「★」の性質の確認 (2)

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 \\ a_1b_2 + a_2b_1 \end{pmatrix}}$$

- $$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\bigstar(\boldsymbol{b}\bigstar\boldsymbol{c}) &= \begin{pmatrix} a_1(b_1c_1 - b_2c_2) - a_2(b_1c_2 + b_2c_1) \\ a_1(b_1c_2 + b_2c_1) + a_2(b_1c_1 - b_2c_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1b_1 - a_2b_2)c_1 - (a_1b_2 + a_2b_1)c_2 \\ (a_1b_1 - a_2b_2)c_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)c_1 \end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{b})\bigstar\boldsymbol{c} \end{aligned}$$

  積 ★ は結合的

2 次元数ベクトルの積「★」(5) (教科書に記述なし)

▷ 積「★」の性質の確認 (3)

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{a} \bigstar \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 - a_2 b_2 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

- $\boldsymbol{a} \bigstar (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} a_1(b_1 + c_1) - a_2(b_2 + c_2) \\ a_1(b_2 + c_2) + a_2(b_1 + c_1) \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} \bigstar \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \bigstar \boldsymbol{c}$

  加算との関係は通常の積と同じ

2 次元数ベクトルの積「★」(6) (教科書に記述なし)

▷ 積「★」の性質の確認 (4)

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 \\ a_1b_2 + a_2b_1 \end{pmatrix}}$$

- $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{e}_1\bigstar\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1\times 1 - 0\times 0 \\ 1\times 0 + 0\times 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1,$

  $\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \bigstar \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\times b_1 - 0\times 0 \\ a_1\times 0 + 0\times b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\boldsymbol{e}_1$ 方向の加算と ★ は数の加算, 乗算と同じ

  $\boldsymbol{e}_1$ 方向の部分ベクトル空間を実数 (のコピー) と解釈

2 次元数ベクトルの積「★」(8) (教科書に記述なし)

▷ 積「★」の性質の確認 (6)

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 - a_2 b_2 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

- $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{e}_1\bigstar\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \times 0 - 0 \times 1 \\ 1 \times 1 + 0 \times 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_2,$
  $\boldsymbol{e}_1\bigstar\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2\bigstar\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$ (積 ★ の可換性も使う),
  $\boldsymbol{e}_1$ は積 ★ に関する単位元 ($\times 1$ と同じはたらき)

2 次元数ベクトルの積「★」(9) (教科書に記述なし)

▷ 積「★」の性質の確認 (7)

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 \\ a_1b_2 + a_2b_1 \end{pmatrix}}$$

- $\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{a_1^2 + a_2^2}\begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$ とすると

  $$\boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{b} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2}\begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1$$

  $\boldsymbol{b} = 1/\boldsymbol{a}$ と解釈できる (割り算ができる)

2 次元数ベクトルの積「★」(10) (教科書に記述なし)

▷ $i^2 = -1$ となること (1)

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{a} \bigstar \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 - a_2 b_2 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{e}_2 \bigstar \boldsymbol{e}_2 \quad = \begin{pmatrix} 0 \times 0 - 1 \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 \end{pmatrix} \quad = -\boldsymbol{e}_1$$

2 次元数ベクトルの積「★」(11) (教科書に記述なし)

▷ $i^2 = -1$ となること (2)

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 - a_2 b_2 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{e}_2\bigstar\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0\times 0 - 1\times 1 \\ 0\times 1 + 1\times 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{e}_1$$

記号の書き換え:

$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\bigstar$	$\boldsymbol{e}_2\bigstar\boldsymbol{e}_2$
$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{i}$	$\times$(場合により略す)	$\boldsymbol{i}^2$

2 次元数ベクトルの積「★」(12) (教科書に記述なし)

▷ $i^2 = -1$ となること (3)

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 - a_2 b_2 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{e}_2\bigstar\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0\times 0 - 1\times 1 \\ 0\times 1 + 1\times 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{i}^2 = -\boldsymbol{1}$$

記号の書き換え:

$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\bigstar$	$\boldsymbol{e}_2\bigstar\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{i}$	$\times$(場合により略す)	$\boldsymbol{i}^2$

2次元数ベクトルの積「★」(13) (教科書に記述なし)

▷ $i^2=-1$ となること (4)

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_1b_1-a_2b_2\\a_1b_2+a_2b_1\end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc}\boldsymbol{e}_2\bigstar\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\times 0-1\times 1\\0\times 1+1\times 0\end{pmatrix} & = -\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{i}^2 & = -\boldsymbol{1}\end{array}$$

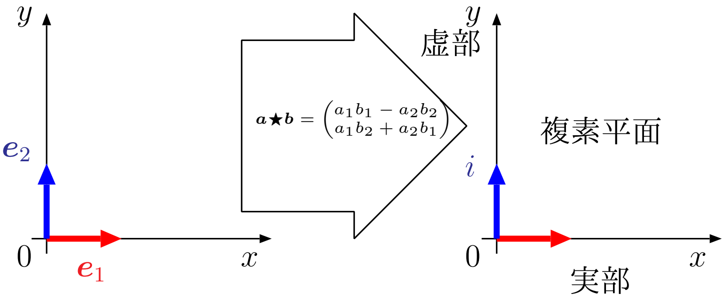
複素数の式 $i^2=-1$ と同じ!

2 次元数ベクトルの積「★」(14) (教科書に記述なし)

- 複素数とは, 2 次元数ベクトルに $\boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 \\ a_1b_2 + a_2b_1 \end{pmatrix}$ という積演算を追加したもの
- 通常は, $\boldsymbol{e}_1$ を略し, $\boldsymbol{e}_2$ のみ記号 i(虚数単位) で置き換え
- 基本ベクトル分解: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x + iy}$
- 複素数は実数を材料として構成される; 上記以外の構成法もある

2次元数ベクトルの積「★」(15) (教科書に記述なし)

▷ 複素平面 (複素数) = 平面ベクトル (2次元数ベクトル)+積 ★



後学期の回路理論で使うので覚えておくこと

2 次元数ベクトルの積「★」(16) (教科書に記述なし)

▷ 複素数の加算と乗算 (1)

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = w_1\boldsymbol{e}_1 + w_2\boldsymbol{e}_2$$

$$= z_1 1 + z_2 i \qquad\qquad = w_1 1 + w_2 i$$

$$\boldsymbol{z} + \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} z_1 + w_1 \\ z_2 + w_2 \end{pmatrix} = (z_1 + w_1)\boldsymbol{e}_1 + (z_2 + w_2)\boldsymbol{e}_2$$

$$= (z_1 + w_1)1 + (z_2 + w_2)i$$

複素数の加算は実部と虚部に分けて (高校で習った規則)

2 次元数ベクトルの積「★」(17) (教科書に記述なし)

▷ 複素数の加算と乗算 (2)

$$\boldsymbol{e}_1\bigstar\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_1\bigstar\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2\bigstar\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2\bigstar\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{1}\times\boldsymbol{1} = \boldsymbol{1}, \quad \boldsymbol{1}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{1} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{1}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z}\bigstar\boldsymbol{w} &= \begin{pmatrix} z_1w_1 - z_2w_2 \\ z_1w_2 + z_2w_1 \end{pmatrix} = (z_1w_1 - z_2w_2)\boldsymbol{e}_1 + (z_1w_2 + z_2w_1)\boldsymbol{e}_2 \\
&= z_1w_1\boldsymbol{e}_1\bigstar\boldsymbol{e}_1 + z_2w_2\boldsymbol{e}_2\bigstar\boldsymbol{e}_2 + z_1w_2\boldsymbol{e}_1\bigstar\boldsymbol{e}_2 + z_2w_1\boldsymbol{e}_2\bigstar\boldsymbol{e}_1 \\
&= (z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2)\bigstar(w_1\boldsymbol{e}_1 + w_2\boldsymbol{e}_2) \\
&= z_1w_1(\boldsymbol{1}\times\boldsymbol{1}) + z_2w_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}) + z_1w_2(\boldsymbol{1}\times\boldsymbol{i}) + z_2w_1(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{1}) \\
&= z_1w_1\boldsymbol{1} - z_2w_2\boldsymbol{1} + z_1w_2\boldsymbol{i} + z_2w_1\boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

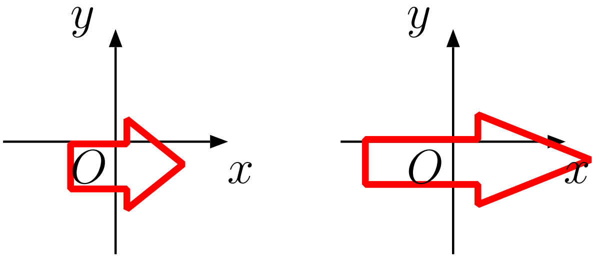
積は $\boldsymbol{1}\times\boldsymbol{1} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{1} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}^2 = -\boldsymbol{1}$ から機械的に計算できる (高校で習った規則)

平面における拡大・縮小変換 (1) (50 ページ)

- x 軸方向に k 倍: $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

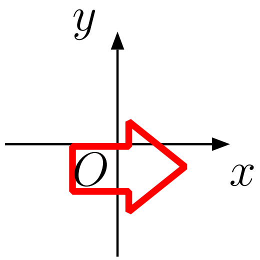
平面における拡大・縮小変換 (2) (50 ページ)

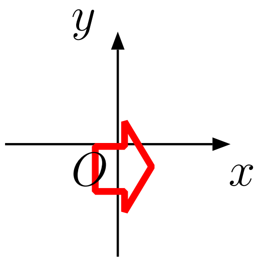
- $k > 1$, たとえば $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なら x 軸方向に 2 倍拡大



平面における拡大・縮小変換 (3) (50 ページ)

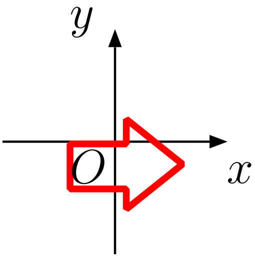
- $0 < k < 1$, たとえば $\begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なら x 軸方向に半分に縮小

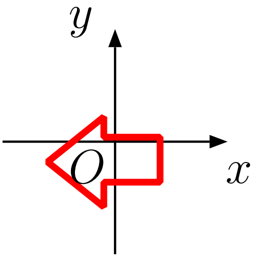




対称変換 (1) (50ページ)

- $k = -1$, すなわち $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なら x 軸方向の折り返し





平面における拡大・縮小変換 (4) (50 ページ)

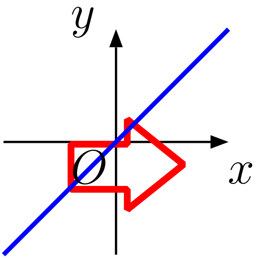
- y 軸方向に k 倍: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
- 相似変換 (全体を k 倍): $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

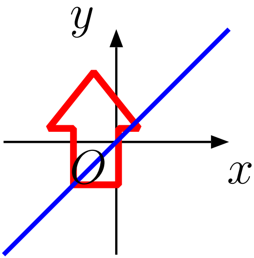
対称変換 (2) (50 ページ)

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は y 軸方向の折り返し
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は原点に関する対称変換
  (すなわち x 軸と y 軸の双方に関する折り返し)

対称変換 (3) (50 ページ)

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は直線 $y = x$ に関する折り返し



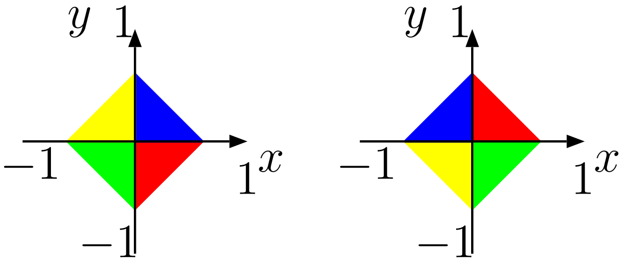


回転変換 (1) (50 ページ)

- $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は原点のまわりに角度 θ だけ回転
- $\theta > 0$ なら反時計回り
- $\theta < 0$ なら時計回り
- $\theta = 0$ なら動かない

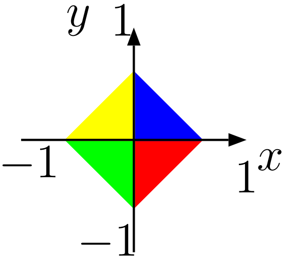
回転変換 (2) (50 ページ)

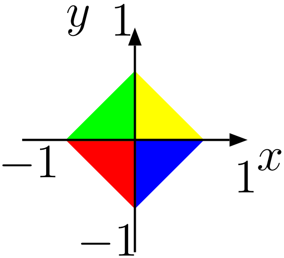
- $\theta = 90^\circ$ なら... $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



回転変換 (3) (50 ページ)

- $\theta = -90^\circ$ なら… $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$





ベクトルの「向き」と固有値 (1) (53 ページ)

- 行列 A に対応する線形写像を f_A とする
- ベクトル $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ がある定数 λ に対して $f_A(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ となるとき

  λ... 固有値
  $\boldsymbol{v}$... (固有値 λ に対応する) 固有ベクトル

- この章では固有値と固有ベクトルのいくつかの性質を調べる
- 詳しい議論は 8 章

ベクトルの「向き」と固有値 (2) (53 ページ)

- λ を固有値, $\boldsymbol{v}$ を対応する固有ベクトルとする
- $\lambda > 0$ のとき, 線形写像 f_A はベクトル $\boldsymbol{v}$ の向きを変えない
  $\lambda > 1$ なら $\boldsymbol{v}$ の方向に拡大, $0 < \lambda < 1$ なら $\boldsymbol{v}$ の方向に縮小
- $\lambda < 0$ のとき, 線形写像 f_A はベクトル $\boldsymbol{v}$ の向きを反転する
  $|\lambda| > 1$ なら $\boldsymbol{v}$ の拡大, $0 < |\lambda| < 1$ なら縮小
- $\lambda = 0$ のとき, この方向のベクトルはすべて零ベクトルになる (潰れる)

ベクトルの「向き」と固有値 (3) (53 ページ)

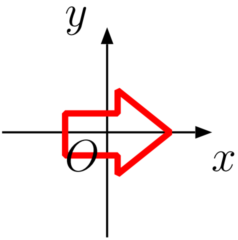
- λ が複素数のこともある
  教科書に記述がないが, 非常に重要なので, 53 ページに書き込むこと
- 平面上の回転に対応する線形変換は複素数の固有値を持つ
- 固有値については第 8 章で詳しくやる
- ここではいくつか例を示す

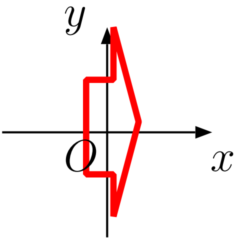
ベクトルの「向き」と固有値 (4) (53 ページ)

- $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ とする
- $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有値 0.5 に対応する固有ベクトル
- $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 2 に対応する固有ベクトル

ベクトルの「向き」と固有値 (5) (53 ページ)

- $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ は x 軸方向を 0.5 倍, y 軸方向を 2 倍にする線形写像



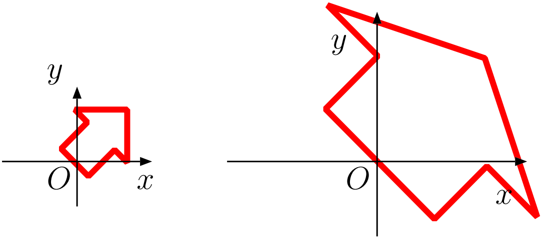


ベクトルの「向き」と固有値 (6) (53 ページ)

- $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ とする
- $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 2 に対応する固有ベクトル
- $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 4 に対応する固有ベクトル

ベクトルの「向き」と固有値 (7) (53 ページ)

- $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ は以下のような写像

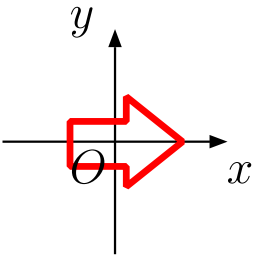


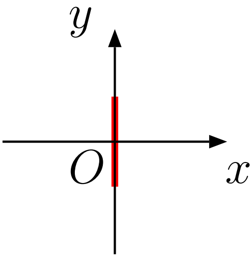
ベクトルの「向き」と固有値 (8) (53 ページ)

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする
- $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有値 0 に対応する固有ベクトル
- $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 1 に対応する固有ベクトル

ベクトルの「向き」と固有値 (9) (53 ページ)

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ により x 軸方向は押し潰されてしまう





ベクトルの「向き」と固有値 (10) (53 ページ)

- $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (90° 回転) とする
- $A \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ は固有値 $-i$ に対応する固有ベクトル
- $A \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ は固有値 i に対応する固有ベクトル
- 成分が実数の行列でも複素数が出てくる