電 158 電気数学 I

第 4 回

1 次変換 (線形変換, 線形写像) (1)

平面の変換 (1) (40 ページ)

- 座標平面上の点 $P(x, y)$ に点 $P'(x', y')$ を対応させる規則を**平面の変換**とよび, $P' = f(P)$ と表す
- 平面から平面への関数, 写像などと呼ぶこともある
- $P' = f(P)$ を P の (f による) 像と呼ぶ
- $(x', y') = f(x, y), \quad f : (x, y) \mapsto (x', y'), \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ などと書く (教科書にない分はメモすること)
- 写像のとる値がベクトルのときには $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ と書く流儀もある (この講義では採用しない)

平面の変換 (2) (40 ページ)

- 2 次の行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が与えられているものとする

- $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ という規則によって
  点 $P(x, y)$ を $P'(x', y')$ を対応させることを考える

- これは平面の変換になっている

平面の変換 (3) (40 ページ)

- 点 $P(x,y)$ と $P'(x',y')$, 点 $P(\overline{x},\overline{y})$ と $P'(\overline{x}',\overline{y}')$ が
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \overline{x}' \\ \overline{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$$
によって対応しているものとする

- $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{x}' \\ \overline{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} \right)$ が成り立つ

- $\begin{pmatrix} kx' \\ ky' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ が成り立つ

平面の変換 (4) (40 ページ)

- 写像 $f(\boldsymbol{x})$ が**線形**であるとは, $\boldsymbol{x}$, $\overline{\boldsymbol{x}}$ と k をどのように取っても

  i) $f(\boldsymbol{x}+\overline{\boldsymbol{x}}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\overline{\boldsymbol{x}})$

  ii) $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$

  が成り立つことをいう

- この式は「線形」という言葉からイメージされるものと (おそらく) かなり異なるが, 定着した言葉なので覚えること

平面の変換 (5) (40 ページ)

- 平面の変換が $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たすとき:
  - 1 次変換, 線形変換, 線形写像
  - 大学の数学では 3 番目の言葉が多く使われる
- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: この 1 次変換 (線形写像) の表現行列

平面の変換 (6) (41 ページ)

- 1 次変換と表現行列は平面に基底を定めることで 1 対 1 で対応する
- 1 次変換は線形である: f が 1 次変換なら

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}) \\
f(k\boldsymbol{x}) &= kf(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

- 上の 2 式をまとめて $f(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x})+\beta f(\boldsymbol{y})$ と書くことも多い

空間の変換 (1) (41 ページ)

- 座標空間上の点 $P(x, y, z)$ に点 $P'(x', y', z')$ を対応させる規則を空間の変換とよび, $P' = f(P)$ と表す
- 空間から空間への関数, 写像などと呼ぶこともある
- $P' = f(P)$ を P の (f による) 像と呼ぶ

空間の変換 (2) (41 ページ)

▷ 記法

- $(x', y', z') = f(x, y, z)$
- $f : (x, y, z) \mapsto (x', y', z')$
- $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ など

空間の変換 (3) (41 ページ)

- 空間の変換が
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
を満たすとき:
  - 1 次変換, 線形変換, 線形写像
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$: この 1 次変換 (線形写像) の表現行列

線形写像 (1) (41 ページ)

- 写像と関数は同じ意味で使われる
- 写像 f が i) $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$, ii) $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$ の 2 性質を満たすとき, 1 次写像, 線形写像などという
- 関数の出発点 (定義域) と行き先 (値域) は平面, 空間以外でもよい
- 出発点 (定義域) が平面で行き先 (値域) が空間のときには表現行列は $(3,2)$ 型の行列になる

線形写像 (2) (41 ページ)

- 出発点 (定義域) が空間で行き先 (値域) が平面のときには表現行列は $(2, 3)$ 型の行列になる
- 出発点 (定義域) が平面で行き先 (値域) も平面のときには表現行列は $(2, 2)$ 型の行列, すなわち 2 次の正方行列になる
- 出発点 (定義域) が空間で行き先 (値域) も空間のときには表現行列は $(3, 3)$ 型の行列, すなわち 3 次の正方行列になる
- 1 次変換 (線形変換) という言葉は表現行列が正方行列になる場合にだけ使われる

恒等変換 (1) (45 ページ)

- 単位行列に対応する 1 次変換を恒等変換という
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

恒等変換 (2) (45 ページ)

- 恒等変換は「何もしない」変換
- 教科書では恒等変換の記号は $i(x)$ だが, 複素数とまぎらわしいのであまり使われない
- $I(x)$, $\mathrm{id}(x)$, $1(x)$ など, いろいろな記号が使われる
- この授業では $\mathrm{id}(x)$, 教科書と変えるので注意

零変換 (45 ページ)

- 零行列に対応する 1 次変換を零変換という
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- 零変換によってすべての点は原点に移る

1次変換と基本ベクトル (45ページ)

- $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1 次変換と基本ベクトル (45 ページ)

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T,$

としたとき

$$A\boldsymbol{x} = x_1 A\boldsymbol{e}_1 + \cdots x_n A\boldsymbol{e}_n$$

となる (教科書にないのでメモしておくこと)

合成変換 (45 ページ)

- 1 次変換の合成には行列の積が対応する
- 行列の積の規則はこうなるように作ってある
- f の表現行列を A, g の表現行列を B とすると, $g \circ f(x)$ の表現行列は BA (順番に注意)
- $g \circ f(x) = g(f(x))$ を合成変換という

逆変換 (46 ページ)

- $f(x)$ の表現行列を A とする．A が正則であるとき, A^{-1} に対応する 1 次変換を $f(x)$ の逆変換とよび, $f^{-1}(x)$ であらわす
- $f \circ f^{-1}(x) = \mathrm{id}(x)$, $f^{-1} \circ f(x) = \mathrm{id}(x)$
- $AA^{-1} = I$, $A^{-1}A = I$ に対応