電 158 電気数学 I
第 3 回
行列

注意事項

- 講義中に教科書の「はじめよう」の項をやるときに, 計算過程の $\boxed{?}$ を省略することがある
- 同様に, 言い回しを若干換えることがある
- 「はじめよう」の練習問題をスクリーンにも出すが, これは補助的なものであり, 各自が教科書を持っていることが前提

行列の定義 (1) (25 ページ)

- $m \times n$ 個の数を矩形にならべ括弧で囲んだもの:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- m 行 n 列行列, (m, n) 行列, $m \times n$ 行列

- 呼び方がいろいろあるので注意

行列の定義 (2) (25 ページ)

なぜこんなものを考えるのか?

- 行列は連立方程式 (後述) や線形写像 (後述) を記述するための適切な言葉
- 方程式を立てて解くという行為は科学・工学・経済などのいろいろな分野で普遍的
- 線形写像も同様に普遍的
- したがって行列は重要

行列の定義 (3) (25 ページ)

- 第 i 行ベクトルあるいは第 i 行:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{red}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- 最初の添字を i に固定

- 2 番目の添字が 1 から n まで動く

行列の定義 (4) (25 ページ)

- 第 j 列ベクトルあるいは第 j 列:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \color{red}{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \color{red}{a_{2j}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \color{red}{\vdots} & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \color{red}{a_{mj}} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- 2 番目の添字を j に固定

- 最初の添字が 1 から m まで動く

行列の定義 (5) (25 ページ)

- (m, n): 行列の型 (次元ともいう)
- $m = n$ のとき: 正方行列
- (n, n) 型の行列を n 次正方行列 あるいは n 次行列 という
- 行列を角括弧であらわす教科書も多い: $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

行列の定義 (6) (25 ページ)

- この教科書では, 行列を英大文字 A, B, C, X, Y, Z であらわすが, 一般的な規則というわけではない
- 「$\cdots$」, 「$\vdots$」, 「$\ddots$」などは省略をあらわす記号, いろいろな使い方がされる

行列の定義 (7) (25 ページ)

- 行列 A の i 行 j 列にある数 (要素) のことを (i, j) 成分という
- 行列 A の (i, j) 成分を a_{ij}, $a_{i,j}$ などと表す
  - 最初の添字が行, 2 番目の添字が列
  - 行列の英大文字に対応する小文字を使うことが多い
  - 添字のあいだにコンマを入れることがある

行列が等しいとは? (25 ページ)

- 行列 A と B の型が等しく, すべて i と j について $a_{ij} = b_{ij}$ となるとき, A と B は等しい
- 型に関する条件が教科書に明示されていないので書き込むこと.

行列の演算 (1) (25 ページ)

- これから行列の演算を定義してゆく
- 積以外はベクトルに関する演算と同じ
- 人工的な規則に見えるかもしれないが, 線形写像 (後述) の演算との対応が取れるように定められている

行列の演算 (2): スカラー倍 (25 ページ)

- すべての成分に同じ数をかける
- $1.1 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 & 2.2 & 3.3 \\ 4.4 & 5.5 & 6.6 \end{pmatrix}$
- (m, n) 行列でもやることは同じ (教科書 26 ページ)

行列の演算 (3): 加減算 (26 ページ)

- 型が異なる行列の加減算はできない
- 加算, 減算とも成分ごとに
- $\begin{pmatrix} 1.2 & 1.4 \\ 1.8 & 2.3 \\ 0.6 & -0.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.8 & 0.7 \\ -0.6 & -0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
- (m, n) 行列でもやることは同じ (教科書 26 ページ)

行列の演算 (4): 積

- 行列の積の定義はややこしいので後で詳しく述べる

零行列 (26 ページ)

- 全成分が零の (m,n) 行列, 正方行列とは限らない
- この教科書では, (m,n) がいくつでも, 英大文字の O であらわす
- 零ベクトルと同じ記号 $\mathbf{0}$, あるいは数と同じ記号 0 を使う本も多い
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 等, 記号はすべて O

計算の性質 (27 ページ)

- $A + (-A) = A - A = O$ 教科書にないので書き込むこと
- $A + O = O + A = A$
- $A + B = B + A$, すなわち加減算の順番は入れ換えられる
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $k(A + B) = kA + kB$

行列の演算 (5): 積 (2) (29 ページ)

- $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$ の積を定義したい
- 行列 A と B の積を AB と書く (記号 $\times$ は使わない)

行列の演算 (6): 積 (3) (30 ページ)

- 行列 A を (m, n) 行列, 行列 B を (p, q) 行列とする
- 積 AB が定義できるのは, $n = p$ のときだけ
- m, q は何でもよい
- 先の例では, 行列 A は $(2, 3)$ 行列, 行列 B は $(3, 4)$ 行列
  $\Longrightarrow$ 積が定義できる
- 積は $(2, 4)$ 行列になる

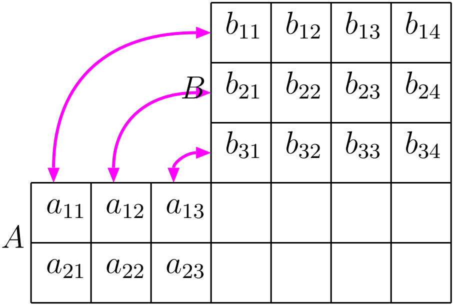
行列の演算 (7): 積 (4) (29 ページ)

- 行列 A を (l, m) 行列, 行列 B を (m, n) 行列とする
- A と B の積は定義できる
- $C = AB$ とおく
- C の (i, j) 成分を
$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}}$ によって定義する

行列の積の覚え方 (1)

- 行列の積の定義は覚えにくい
- 不慣れなうちは以下に述べるようにするとよい
- AB を計算するときにはまず A と B の成分を次画面のように並べる

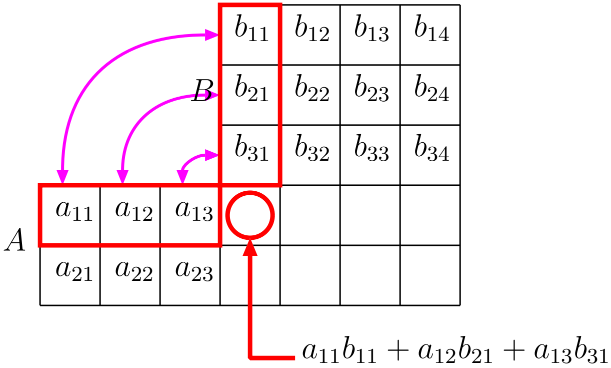
行列の積の覚え方 (2)



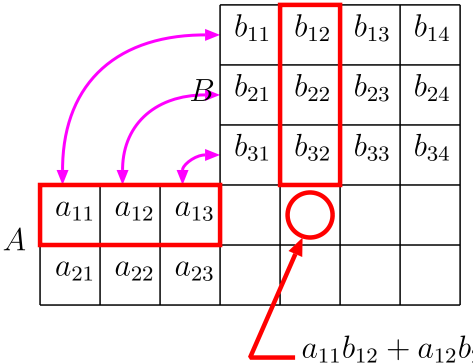
A の「横」と B の「縦」が対応; AB の型は自動的にわかる

サイズが合わないときは積は定義できない

行列の積の覚え方 (3)

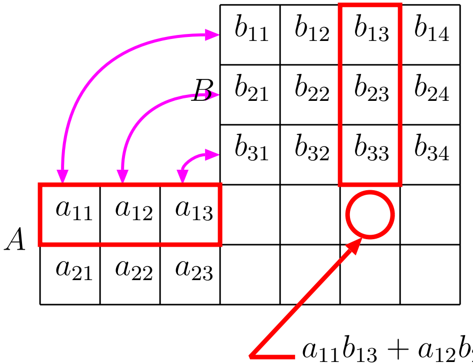

B
b_{11} b_{12} b_{13} b_{14}
b_{21} b_{22} b_{23} b_{24}
b_{31} b_{32} b_{33} b_{34}
A
a_{11} a_{12} a_{13}
a_{21} a_{22} a_{23}
$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$

行列の積の覚え方 (4)



$$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$

行列の積の覚え方 (5)



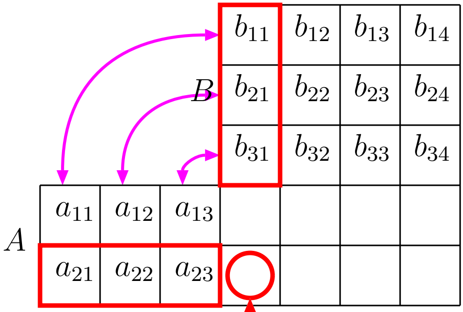
$$a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$$

行列の積の覚え方 (6)

			B	b_{11}	b_{12}	b_{13}	$\boxed{b_{14}}$
				b_{21}	b_{22}	b_{23}	$\boxed{b_{24}}$
				b_{31}	b_{32}	b_{33}	$\boxed{b_{34}}$
A	$\boxed{a_{11}}$	$\boxed{a_{12}}$	$\boxed{a_{13}}$				
	a_{21}	a_{22}	a_{23}				

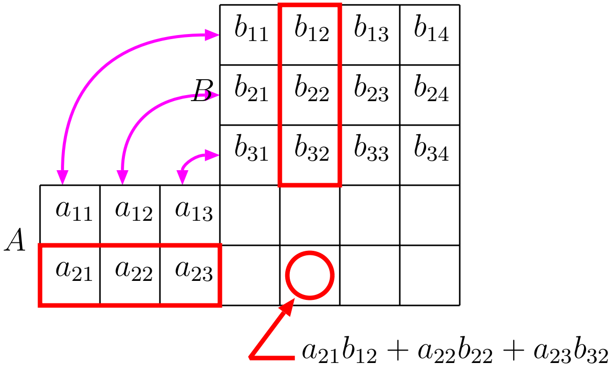
$$a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} + a_{13}b_{34}$$

行列の積の覚え方 (7)



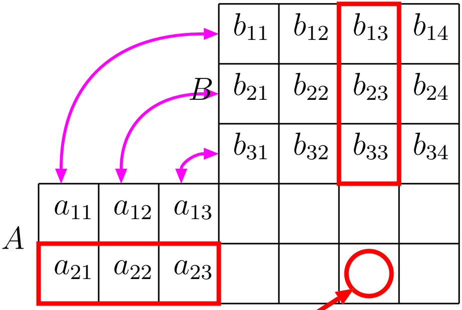
$$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$$

行列の積の覚え方 (8)



B
b_{11} b_{12} b_{13} b_{14}
b_{21} b_{22} b_{23} b_{24}
b_{31} b_{32} b_{33} b_{34}
A
a_{11} a_{12} a_{13}
a_{21} a_{22} a_{23}
$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$

行列の積の覚え方 (9)



$$a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$$

行列の積の覚え方 (10)

				b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}
			B	b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}
				b_{31}	b_{32}	b_{33}	b_{34}
A	a_{11}	a_{12}	a_{13}				
	a_{21}	a_{22}	a_{23}				

$$a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} + a_{23}b_{34}$$

行列の積の覚え方 (11)

- ここで説明した覚え方の典拠は J. H. Hubbard and B. B. Hubbard, Vector calculus, linear algebra, and differential formsa unified approach, 3/e, Matrix Editions, 2007.
- これはあくまで覚え方, 答案を書くときには

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}$$

のようにきちんと行列の形で書くこと (わかってもらえない可能性がある)

行列の積の計算の例 (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$AB = \boxed{?}$$

行列の積の計算の例 (2)

$$
\begin{array}{ccc|c|c|c|c}
 & & & \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\
 & & & \boxed{5} & 6 & 7 & 8 \\
 & & & \boxed{9} & 10 & 11 & 12 \\
\hline
\boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \bigcirc & & & \\
\hline
0 & 1 & 1 & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$1 \times 1 + 0 \times 5 + 1 \times 9 = 10$$

行列の積の計算の例 (3)

			1	2	3	4
			5	6	7	8
			9	10	11	12
1	0	1				
0	1	1				

$$1 \times 2 + 0 \times 6 + 1 \times 10 = 12$$

行列の積の計算の例 (4)

$$\begin{array}{ccc|c|c|c|c}
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & & & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 & & & 9 & 10 & 11 & 12 \\
\hline
1 & 0 & 1 & & & & \\
\hline
0 & 1 & 1 & & & & \\
\hline
\end{array}$$

$$1 \times 3 + 0 \times 7 + 1 \times 11 = 14$$

行列の積の計算の例 (5)

			1	2	3	4
			5	6	7	8
			9	10	11	12
1	0	1				
0	1	1				

$$1 \times 4 + 0 \times 8 + 1 \times 12 = 16$$

行列の積の計算の例 (6)

$$\begin{array}{ccc|c|c|c|c}
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & & & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 & & & 9 & 10 & 11 & 12 \\
\hline
1 & 0 & 1 & & & & \\
\hline
0 & 1 & 1 & \bigcirc & & &
\end{array}$$

$$1 \times 5 + 1 \times 9 = 14$$

行列の積の計算の例 (7)

$$
\begin{array}{ccc|c|c|c|c}
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & & & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 & & & 9 & 10 & 11 & 12 \\
\hline
1 & 0 & 1 & & & & \\
\hline
0 & 1 & 1 & & \bigcirc & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$1 \times 6 + 1 \times 10 = 16$$

行列の積の計算の例 (8)

$$
\begin{array}{ccc|c|c|c|c|}
 & & & 1 & 2 & \boxed{3} & 4 \\
 & & & 5 & 6 & \boxed{7} & 8 \\
 & & & 9 & 10 & \boxed{11} & 12 \\
\hline
1 & 0 & 1 & & & & \\
\hline
\boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & & & \bigcirc & \\
\hline
\end{array}
$$

$$1 \times 7 + 1 \times 11 = 18$$

行列の積の計算の例 (9)

			1	2	3	4
			5	6	7	8
			9	10	11	12
1	0	1				
0	1	1				

$$1 \times 8 + 1 \times 12 = 20$$

行列の積の計算の例 (10)

まとめて

$$
\begin{array}{cc|cccc}
 & & & & B & \\
 & & & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 & & 9 & 10 & 11 & 12 \\
\hline
 & 1 \quad 0 \quad 1 & 10 & 12 & 14 & 16 \\
A & 0 \quad 1 \quad 1 & 14 & 16 & 18 & 20
\end{array}
$$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 14 & 16 \\ 14 & 16 & 18 & 20 \end{pmatrix}$$

最後の部分を書かないと解答にならないので注意

単位行列 (1) (35 ページ)

- 説明の便宜上, 教科書と順番を入れ換える
- 正方行列で, 左上から右下への対角線上の要素のみ 1, 他の要素は零のものを単位行列という
- 単位行列を英大文字の I であらわす. 次元を明示して I_n とすることもある.
- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$

単位行列 (2) (35 ページ)

- n 次の単位行列 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
- 教科書によっては $I = \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, などと書かれることもあるので注意

単位行列の性質 (1) (36 ページ)

- A を (m, n) 型行列とする.
- $I_m A = A$, $AI_n = A$ となる.
- 教科書には A が正方行列である場合に関する記述しかないので書き込むこと

単位行列の性質 (2) (36 ページ)

- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ とする
- I_2 は $(2,2)$ 型の行列, A は $(2,3)$ 型の行列だから, 積が定義できる
- $I_2 A = A$ であることを確かめる

単位行列の性質 (3) (36 ページ)

先ほど説明した記法を使えば

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & & A & \\
 & & & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 & & & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
\cline{2-6}
 & 1 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
I_2 & 0 & 1 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 & & & & I_2A &
\end{array}
$$

よって $I_2A = A$

単位行列の性質 (4) (36 ページ)

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする
- A は $(1, 2)$ 型の行列, I_2 は $(2, 2)$ 型の行列だから, 積が定義できる
- $AI_2 = A$ であることを確かめる

単位行列の性質 (5) (36 ページ)

先ほど説明した記法を使えば

$$
\begin{array}{ccc|cc}
 & & & \multicolumn{2}{c}{I_2} \\
 & & & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 1 \\ \cline{2-5}
A & a_{11} & a_{12} & a_{11} & a_{12} \\
 & & & \multicolumn{2}{c}{AI_2}
\end{array}
$$

よって $I_2A = A$

行列の演算 (8): 行列とベクトルの積 (1) (30 ページ)

- 行ベクトル (横ベクトル) は $(1, n)$ 型行列と同じもの
- 列ベクトル (縦ベクトル) は $(n, 1)$ 型行列と同じもの
- 行列とベクトルの積の規則は行列同士のものと同じ
- 教科書 30 ページに書き込むこと

行列の演算 (9): 行列とベクトルの積 (2) (30 ページ)

- $(1, n)$ 型行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$,
  最初の添字はつねに 1 だから書かない

- $(n, 1)$ 型行列 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$,
  第 2 の添字はつねに 1 だから書かない

行列の演算 (10): 行列とベクトルの積 (3) (30 ページ)

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ とする
- A は $(2,3)$ 型行列, $\boldsymbol{v}$ は 3 次の列ベクトル, すなわち $(3,1)$ 型の行列だから, 積が定義できる

行列の演算 (11): 行列とベクトルの積 (4) (30 ページ)

$$
\begin{array}{cc|l}
 & & \boldsymbol{v} \\
 & & v_1 \\
 & & v_2 \\
 & & v_3 \\
\hline
\multirow{2}{*}{A} & a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} & \bigcirc \longleftarrow a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 \\
 & a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} & \bigcirc \longleftarrow a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3
\end{array}
$$

行列の演算 (12)(30 ページ)

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 11$

理由:
$$\begin{array}{cc|c} & & 3 \\ & & 4 \\ \hline 1 & 2 & \bigcirc \end{array} \longleftarrow 3 \times 1 + 4 \times 2$$

行列の演算 (12)(30 ページ)

- $$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

  理由: $$\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 8 \end{array}$$

- 足し合わせる項がないので見た目が少し違うがやっていることは同じ

- この計算ができない人が非常に多いので注意

行列の累乗 (30 ページ)

- A を正方行列とする
- $A^0 = I$, $A^1 = A$ と定義する
- $A^2 = AA$ と定義する
- $A^k = A^{(k-1)}A$ と定義する
  ... 教科書と違う表現, メモすること
- A の負べきはこの時点では定義しない
- 累乗のことをべき (冪) ともいう

行列の和と積の性質 (31 ページ)

- $A(B+C) = AB + AC$
- $(A+B)C = AC + BC$
- $(AB)C = A(BC)$

転置行列 (1) (31 ページ)

- A を (m,n) 型行列, B を (n,m) 型行列とする
- B が A の転置行列であるとは, $b_{ji} = a_{ij}$ となることをいう
- A の転置行列を ${}^tA$, A^T, A' などであらわす
- 国内の数学書では ${}^tA$ が多いが それ以外では A^T が多い
- この講義では A^T (教科書と敢えて記法を変えるので注意)

転置行列 (2) (31 ページ)

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ なら $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ なら $\boldsymbol{v}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ なら $\boldsymbol{w}^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

転置行列 (3) (31 ページ)

- $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ とする
- $AB = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} + a_2 b_{21} & a_1 b_{12} + a_2 b_{22} \end{pmatrix}$
- $(AB)^T = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} + a_2 b_{21} \\ a_1 b_{12} + a_2 b_{22} \end{pmatrix} = B^T A^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- 積を転置すると順番が変わる
- この例では $A^T B^T$ は定義されない

対称行列と交代行列 (31 ページ)

- $A^T = A$ となる行列: 対称行列

  例: $\begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 100 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 100 & 1000 \\ 100 & 1 & 10 \\ 1000 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

  対角線をはさんで同じ値がならぶ

- $A^T = -A$ となる行列: 交代行列, 歪対称行列

  例: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -10 \\ -1 & 0 & 100 \\ 10 & -100 & 0 \end{pmatrix}$

  対角線の要素はすべて零, 対角線をはさんで符号が反転

逆行列 (1) (35 ページ)

- A が正方行列で, $AB = I$, $BA = I$ を満たす正方行列が存在するとき, A は正則であるといい, B を A の逆行列という
- A の逆行列を A^{-1} と書く

逆行列 (2) (36 ページ)

- 2 次の正方行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が逆行列を持つための必要十分条件は $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$,
  逆行列は $\dfrac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$
- $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$: この行列の行列式

逆行列 (3) (36 ページ)

- A, B がともに n 次で正則なら AB も正則
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (積の順番が変わる):

$$
\begin{aligned}
(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\
&= AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\
(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B \\
&= B^{-1}IB = B^{-1}B = I
\end{aligned}
$$