電158 電気数学I

担当者: 半場 滋

(専門: 制御工学)

1年次前学期(夜間主コース)

教科書

丸本 嘉彦, 張替 俊夫, 田村 誠, 市原 一裕 著:
はじめて学ぶ線形代数,
共立出版 (2007)
ISBN: 9784320018549

- 穴埋め式の教科書
- 授業で穴を埋めながら進めるので必ず購入すること
- 講義中の説明は教科書の代替にはならない!
- 教科書の付録に英文字の字体やギリシャ文字の説明, 適宜参照すること

- 教科書・講義資料の誤りを見付けたときには，適宜指摘してほしい
- 誤りの指摘があった場合は小テストの点に 1 点加点する (最初に指摘した 1 名のみ); ただし練習問題等の書き方や言い回しを教科書と変えることがあり，これは加点の対象としない
- 教科書は非常にやさしいが内容も最低限
- 適宜説明を追加するので教科書 (等) に書き込むように

シラバス

授業内容と方法

線形代数の基礎 (ベクトル, 行列, 1 次変換, 連立 1 次方程式, 行列式, 線形空間, 固有値など) を取り扱う．授業時間 (90 分間) の大部分は講義形式とし, 残り時間において演習をおこなう．2 回目以降は, 授業開始時に理解度の確認のための小テストをおこなう．

達成目標

線形代数の基本演算と考え方を身につける.

1. ベクトルと行列に関する演算ができる
2. 行列式の性質を理解し, 行列式を用いた計算ができる
3. 連立1次方程式を解くことができる
4. 線形空間および線形写像の概念を理解する
5. 固有値を理解し, 行列を対角化することができる

この科目は本学科の学習・教育目標 (A) 電気電子技術者としての基礎学力の修得に関連しており, 特に自然科学、数学といった技術者の基礎知識・能力を修得することを目標としている.

評価基準

1. ベクトルの演算 (加算およびスカラー倍) ができる
2. ベクトルのノルムおよび内積, 3 次元数ベクトルの外積の計算ができる
3. 行列の演算 (加算およびスカラー倍, 乗算, 転置) ができる
4. 行列の階数を計算できる
5. 連立 1 次方程式を解くことができる
6. ベクトルの 1 次独立・1 次従属を判定できる
7. 行列式を計算できる
8. 逆行列を計算できる
9. ベクトル空間の概念を説明できる
10. ベクトル空間の基底および次元の概念を説明できる
11. 線形写像の概念を説明できる
12. 固有値および固有ベクトルの計算ができる
13. 行列を対角化できる

評価基準

小テスト (50 総合点の 90 点以上を A, 80 点以上を B, 70 点以上を C, 60 点以上を D, 60 点未満を F(不可) 授業総時数の 1/3 以上欠席した場合には F

評価基準

配布資料の通り

事前・事後学習

教科書の練習問題を解いてくることを宿題として課す．講義 2 回目以降には授業開始時に確認のための小テストをおこなう．

授業の流れ

1. 小テスト (2 回目以降) (10 分)
2. 小テスト解答 (2 回目以降) (10 分程度)
3. 以下のサイクルを繰り返す (変形版あり)

   講義 (20 分くらい)

   $\Downarrow$

   教科書「はじめよう」
   穴埋め演習+解答 (10 分くらい)

4. 穴埋め演習の確認, 講義終了

その他注意点 (1)

- 授業終了時に穴埋めをやっているかチェックする (ただし解の正否は問わない)
- 「はじめよう」の答案を教科書に書き込むのが嫌な者はノートに書いてもよい
- やり残した「はじめよう」の解答を掲示するので翌週までに見ておくこと
- 2 回目以降は授業開始時に前回の授業に関する小テスト (10 分) をおこなう (遅刻しても受けられるが時間延長はない)

その他注意点 (2)

- 高等学校の数学 B 程度の内容から始めるが, 後半どんどん進み方が速くなるので確実に予習復習すること
- 講義の最終回により進んだ教科書を紹介する
- 受講者からの要求があれば参考書を適宜紹介する
- 担当者ホームページ *http://dsl4.eee.u-ryukyu.ac.jp/*
  この講義資料をアップロードする (ただし「はじめよう」の解答は除く)

第1回: ベクトル (1)

ベクトルとは何か (1 ページ)

- 初学者向けの定義: 大きさと向きを持つ量
(教科書 1 ページ)

- たし算と定数倍 (スカラー倍) ができるような「もの」をまとめて呼ぶことば

- 今回は正式な定義は述べない

いろいろなベクトル (1 ページ)

- 「猫」… いろいろな猫がいる
- 「ベクトル」… いろいろなベクトルがある
- 使いながら慣れてもらう

▷ ベクトルの例

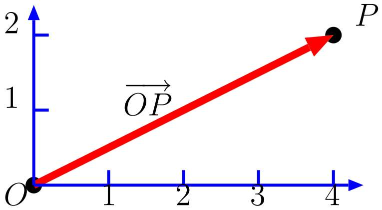
- 2 次元ベクトル・平面ベクトル
- 3 次元ベクトル・空間ベクトル

ベクトルのいろいろな記法 (1ページ)

- 点 P と Q を結ぶ「有向線分」$\overrightarrow{PQ}$
- $\overrightarrow{x}$ (文字の上に矢印)
- $\boldsymbol{x}$ (太字) ... 大学1年次ではこれが多い
- x (ただの英文字)

平面ベクトル・2 次元ベクトル (1 ページ)

- 平面で, 原点 O と点 P を結んだベクトル $\overrightarrow{OP}$

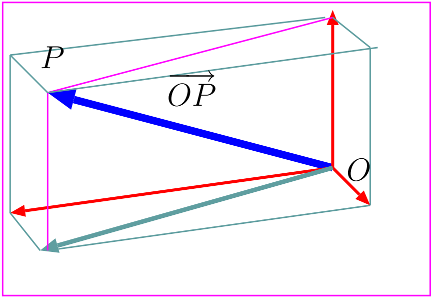


$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2 次元の数ベクトル (2 ページ, 4 ページ)

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{あるいは} \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$$

空間ベクトル・3 次元ベクトル (1 ページ)

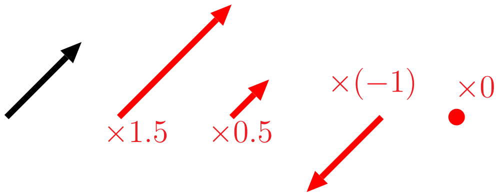


3 次元の数ベクトル (2 ページ, 4 ページ)

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \text{あるいは} \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}$$

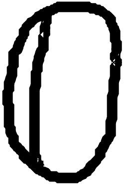
ベクトルの演算: スカラー倍 (1ページ)

- スカラー倍とは...
  - 長さをの伸縮と向きの反転
  - 零倍すると, 長さのない特別なベクトル: 零ベクトル



零ベクトルの記法 (2 ページ)

- 数字「0」を太字にする 「**0**」
- 手書きのときには数字「0」の一部を 2 重に書くことが多い



2 次元の数ベクトルのスカラー倍 (1 ページ)

▷ 数ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

3 倍: $3\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \times 4 \\ 3 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}$	0.5 倍: $0.5\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
0 倍: $0\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	

- 零ベクトルの全成分は零

3 次元の数ベクトルのスカラー倍 (1 ページ)

▷ 数ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

3 倍: $3\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}$	0.5 倍: $0.5\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
0 倍: $0\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	零ベクトルの全成分は零

ベクトルの加算 (2 ページ, 5 ページ)

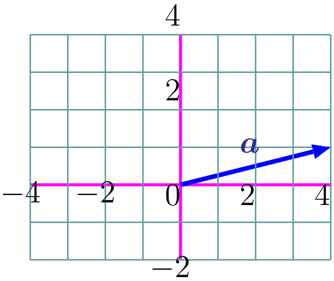
- 教科書と順番を変えて, 数ベクトルの加算から説明

2次元の数ベクトルの加算 (2ページ, 5ページ)

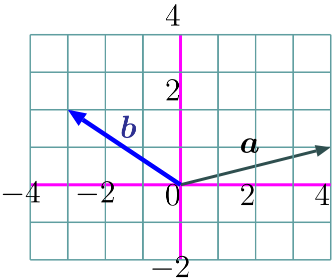
▷ $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boxed{4} & + & \boxed{-3} \\ \boxed{1} & + & \boxed{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

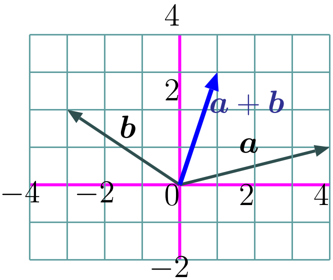
平面ベクトルとしての解釈 (1) (2 ページ)



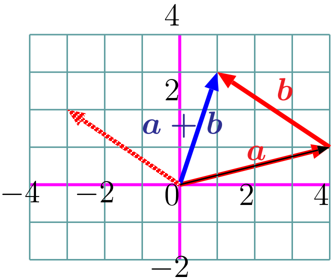
平面ベクトルとしての解釈 (2) (2 ページ)



平面ベクトルとしての解釈 (3) (2 ページ)



平面ベクトルとしての解釈 (4) (2 ページ)



- ベクトル $\boldsymbol{a}$ の先端にベクトル $\boldsymbol{b}$ を継ぎ足しても同じ (高等学校での定義,2 ページ)

2 次元の数ベクトルと零ベクトルの加算 (2 ページ)

▷ $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} \boxed{4} & + & \boxed{0} \\ \boxed{1} & + & \boxed{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ベクトルに零ベクトルを足しても同じベクトルのまま
- 平面ベクトルの先端に長さ零のベクトル (点) を継ぎ足しても同じベクトルのまま

3 次元の数ベクトルの加算 (5 ページ)

▷ $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boxed{4} & + & \boxed{-3} \\ \boxed{1} & + & \boxed{2} \\ \boxed{5} & + & \boxed{-7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- 空間ベクトルとしての解釈: 平面ベクトルと同じ (図は見にくくなるので略)
- ベクトル $\boldsymbol{a}$ の先端にベクトル $\boldsymbol{b}$ を継ぎ足す

3 次元の数ベクトルと零ベクトルの加算 (2 ページ)

▷ $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \begin{pmatrix} \boxed{4} & + & \boxed{0} \\ \boxed{1} & + & \boxed{0} \\ \boxed{5} & + & \boxed{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- ベクトルに零ベクトルを足しても同じベクトルのまま
- 空間ベクトルの先端に長さ零のベクトル (点) を継ぎ足しても同じベクトルのまま

注意事項 (1) (2 ページ, 教科書に書き込むこと)

- ベクトルの次元にかかわらず, 零ベクトルを記号 $\mathbf{0}$ であらわす
- ベクトルの加算は順番に依存しない: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
- 今後, 結果が順番に依存する演算も出現するので注意

注意事項 (2) (2 ページ, 教科書に書き込むこと)

- $(-1)\boldsymbol{a}$ を $-\boldsymbol{a}$ と書く, ベクトル $\boldsymbol{a}$ の反対向き
- $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$
- $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$ を $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ と書く
- $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$ となる
  数ベクトルの成分の加算を思い出せば当然!
- 次元が違うベクトルどうしの加算はできない

数ベクトルの表示について (1) (2 ページ)

- 平面上の点 A の座標が (a_1, a_2) であるとき
  ...$A(a_1, a_2)$ と書くことがある

- $\left\{\begin{array}{l}\text{原点と } A \text{ を結ぶベクトル } \overrightarrow{OA} \\ \text{原点と } B \text{ を結ぶベクトル } \overrightarrow{OB}\end{array}\right.$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$\Rightarrow \text{ 両辺に } -\overrightarrow{OA} \text{ を加える}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

数ベクトルの表示について (2) (2 ページ)

▷ 点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ が与えられているとき

- $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

  (教科書 2 ページ)

数ベクトルの表示について (3) (2 ページ)

▷ 空間ベクトルの場合

▷ 点 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ が与えられているとき

- $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

2 次元の数ベクトル (1) 4 ページ

- 2 次元の数ベクトル: $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ あるいは $\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$
- ベクトルとその成分 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$
- x_1: 第 1 成分
- x_2: 第 2 成分
- ベクトルは太字, ベクトルの成分は細字

2 次元の数ベクトル (2) 4∼5 ページ

- 列ベクトル (縦ベクトル) … $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
- 行ベクトル (横ベクトル) … $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$
- 零ベクトル (列ベクトルの場合)… $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- 零ベクトル (行ベクトルの場合)… $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 次元の数ベクトル (3) 4 ページ

- $\left\{\begin{array}{l}\text{列ベクトル (縦ベクトル)} \\ \text{行ベクトル (横ベクトル)}\end{array}\right.$ どちらの言葉も使われる
- 以降, 特に断らない限り, ベクトルは列ベクトル
- 零ベクトルの記号はいつでも $\mathbf{0}$

2 次元の数ベクトル (4) 4 ページ

- $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$
- 英文字はいろいろ

3 次元の数ベクトル (1) 4 ページ

- 3 次元の数ベクトル: $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ あるいは $\begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}$
- ベクトルとその成分: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$
- x_1: 第 1 成分, x_2: 第 2 成分, x_3: 第 3 成分
- ベクトルは太字, ベクトルの成分は細字

3 次元の数ベクトル (2) 4 ページ

- 列ベクトル (縦ベクトル)... $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
- 行ベクトル (横ベクトル)... $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$
- どちらの言葉も使われることがあるので注意
- 以降, 特に断らない限り, ベクトルは列ベクトル

3 次元の数ベクトル (3) 5 ページ

- 零ベクトル (列ベクトル)... $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- 零ベクトル (行ベクトル)... $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- 零ベクトルの記号はいつでも $\mathbf{0}$

3 次元の数ベクトル (4) 4 ページ

- $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$
- 英文字はいろいろ
- 2 次元と 3 次元のベクトルで記号を使い分けることはない

n 次元の数ベクトル (1) (4ページ)

- 4ページに書き込むこと
- 列ベクトル (縦ベクトル)… $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- 行ベクトル (横ベクトル)… $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$
- x_1: 第 1 成分, x_2: 第 2 成分, …, x_n: 第 n 成分

n 次元の数ベクトル (2) (4 ページ)

- 零ベクトル (列ベクトル)... $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
- 零ベクトル (行ベクトル)... $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
- 零ベクトルの記号はいつでも $\mathbf{0}$
- 次元によって記号を変えることはない

n 次元の数ベクトル (3) (4 ページ)

- $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

記号に関する約束 (4 ページ)

- $\mathbb{R}$: 実数全体
- $\mathbb{R}^2$: 2 次元の数ベクトル全体
- $\mathbb{R}^3$: 3 次元の数ベクトル全体
- $\cdots$
- $\mathbb{R}^n$**: n 次元の数ベクトル全体**
  教科書 4 ページに書き込むこと!

数ベクトルの計算 (1) (5 ページ)

- $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$:
  ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ のすべての成分が等しい
- ベクトルのスカラー倍:
  $k\boldsymbol{a}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の全成分を k 倍したもの
- ベクトルの加算:
  $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成分ごとの和
- 教科書 5 ページに 3 次元ベクトルの例, 見比べること

数ベクトルの計算 (2) (5 ページ)

- ベクトルの長さのことを「ノルム」という
- ベクトルの「大きさ」「長さ」「ノルム」, すべて意味は同じ
- ノルムの記号: $|\boldsymbol{a}|$, $\|\boldsymbol{a}\|$ など (本によって違う)
- 2 次元数ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ のノルムは $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

数ベクトルの計算 (3) (5 ページ)

- 3 次元数ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

- **n 次元数ベクトル** $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$**:** $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$

  教科書に記述がないので書き込むこと!

数ベクトルの計算 (4) (5~6 ページ)

- ノルムが 1 のベクトルのことを単位ベクトルという
- $\boldsymbol{a}$ が零ベクトルではないとき, $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ と同じ方向の単位ベクトル
- $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$, $\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ といった書き方もあるので注意
  $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ と意味は同じ, 教科書に書き込むこと
- ベクトルどうしの割り算はできない
- ベクトルどうしの「掛け算」は **3 次元に限り**後で定義される (9 ページ)