ディジタル信号処理
第 12 回
マルチレート信号処理

マルチレート信号処理とは

- マルチレート信号処理とは, 信号のサンプリング周波数の変換を伴う信号処理のこと.
- 歴史的には, サンプリング周波数が異なるシステムの間でデータをやり取りの技法
- 今日では, マルチレート信号処理は日常生活に浸透している.

- たとえば, ハイレゾ音源をダウンロード形式で購入した場合のサンプリング周波数は, FLAC形式とDSD形式では …
  FLAC: 44.1/48/88.2/96/176.4/192/384 kHz
  DSD: 2.8/5.6/11.2 MHz
  手持ちの再生環境がファイルのサンプリング周波数に対応していない場合には, サンプリング周波数の変換が必要になる.

今回の講義の教科書以外の典拠は 貴屋, マルチレート信号処理, 昭晃堂, 1995.

- マルチレート信号処理は,
  - ▷ 信号のサンプリング周波数を下げること (ダウンサンプリングという)
  - ▷ 信号のサンプリング周波数を上げること (アップサンプリングという)

に関連した処理から成る.

- ダウンサンプリングをする機器をダウンサンプラと呼ぶ. サンプリング周波数を $1/D$ に変えるダウンサンプラを $\boxed{\downarrow D}$ という図記号で表す.
- アップサンプリングをする機器をアップサンプラと呼ぶ. サンプリング周波数を U 倍に変えるアップサンプラを $\boxed{\uparrow U}$ という図記号で表す.

- ダウンサンプラとアップサンプラは, 単体で使用すると, エイリアシングによる信号の歪みを引き起こす. そこで, これらと適切なディジタルフィルタと組み合わせて使う必要がある (後述).

- ダウンサンプラとディジタルフィルタを組み合わせたものを**デシメータ (decimeter, 間引き器)** と呼ぶ.
- アップサンプラとディジタルフィルタを組み合わせたものを**インタポレータ (interpolator, 補間器)** と呼ぶ.

- サンプリング周波数の変換はアップサンプリング, ダウンサンプリングおよびディジタルフィルタによる処理を含むが, フィルタによる処理はフィルタの係数と信号との乗算およびその結果の加算なので, リアルタイム信号処理では, これを低いサンプリング周波数の信号に対して行う場合と高いサンプリング周波数の信号に対して行なう場合で, CPU への負荷が変わる.

- 具体的な構成は後で述べるが, 乗算を低いサンプリング周波数で実行するためによく知られたフィルタの構成法に, 直接型構成と呼ばれる構成法と, ポリフェーズ構成と呼ばれる, フィルタを適切に分割した構成がある.

- 信号を処理する際に, 信号を周波数領域で複数の成分に分解し, 成分ごとに異なる処理をおこなうことが望ましい場合がある. これを実現するためのフィルタの構成をフィルタバンクと呼ぶ. フィルタバンクはマルチレート信号処理の枠組の中で取り扱われることが通例である.
- 以下では, これらについて順番に説明する.

アップサンプリング

- 信号 $x = (x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ を U 倍にアップサンプリングすることを考える $(U \in \mathbb{N})$.
- 最も素朴な方法は, U の n 倍 $(n \in \mathbb{Z})$ の時刻では $y[nU] = x[n]$ とし, それ以外の時刻では y の値を零にする, という方法である．実際に, この方法が用いられる.

- たとえば, $x[0] = 4$, $x[1] = 8$, $x[2] = 2$ としたとき, これを 3 倍にアップサンプリングした信号を y とすると,

$$
\begin{aligned}
&y[0] = 4, \quad y[1] = 0, \quad y[2] = 0, \\
&y[3] = 8, \quad y[4] = 0, \quad y[5] = 0, \\
&y[6] = 2, \quad y[7] = 0, \quad y[8] = 0
\end{aligned}
$$

となる.

- x が z 変換可能であると仮定し, これを U 倍にアップサンプリングした信号を y とする. y も z 変換可能であると仮定し (収束領域は後で調べる), x と y の z 変換を X_Z, Y_Z とすると $Y_Z(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]z^{-nU} = X_z(z^U)$ となる.

アップサンプリングと収束領域

$R_1(x) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[n]|}$, $R_2(x) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[-n]|}$ とすると, x の収束領域は $\{z \in \mathbb{C} : R_1(x) < z < \frac{1}{R_2(x)}\}$ であった. y の収束領域は, $y[n] = 0$ の項が評価に寄与しないことに注意すると, $R_1(y) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|y[n]|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[kU]{|y[kU]|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[kU]{|x[k]|} = (R_1(x))^U$, $R_2(y) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|y[-n]|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[kU]{|y[-kU]|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[kU]{|x[-k]|} = (R_2(x))^U$ なので, 収束領域は

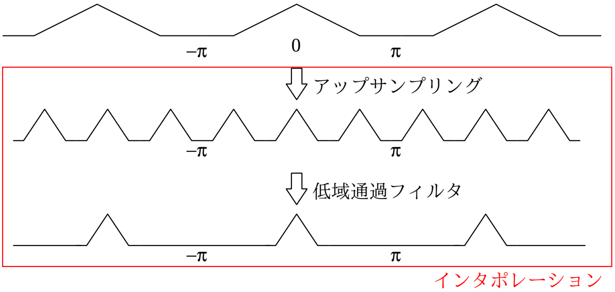
$$\left\{z \in \mathbb{C} : (R_1(x))^U < z < \frac{1}{(R_2(x))^U}\right\}$$

である. これが空集合でないと仮定しなければならない. この条件は, 信号が因果的な場合には後半の条件はなくなるので問題にならないが, 信号が因果的でない場合には制約的である.

- x と y の収束領域がともに単位円を含むものと仮定し, z に $e^{j\omega}$ を代入すると, x および y の周波数特性 ($X(\omega)$ と $Y(\omega)$ と書く) が得られる. $Y_Z\big|_{z=e^{j\omega}} = X_Z\big|_{z=e^{jU\omega}}$ だから, $Y(\omega)$ は $X(\omega)$ を横軸方向に $1/U$ に縮小したものである.

- $X(\omega)$ は周期 2π の周期関数だから, $Y(\omega)$ は周期 $2\pi/U$ の周期関数である.

- アップサンプリングによって余分な周波数成分が発生しないようにするためには, アップサンプリング後に, 低域通過フィルタによって $[-\pi/U, \pi/U]$ の範囲以外の周波数特性を零にする必要がある. アップサンプラにディジタルフィルタとしてこの低域通過フィルタを含めたものインタポレータと呼ぶ.
- 以下に $U = 3$ の場合の模式図を示す.



−π
0
π
アップサンプリング
−π
π
低域通過フィルタ
−π
π
インタポレーション

ダウンサンプリング

- 信号 $x = (x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ を $1/D$ 倍にダウンサンプリングすることを考える ($U \in \mathbb{N}$).
- 最も素朴な方法は, D の n 倍 ($n \in \mathbb{Z}$) の時刻の x 値を使って $y[n] = x[nD]$ とする方法で, 実際に, この方法が用いられるが, エイリアシングの発生を防ぐために, 信号 x に前処理を施す必要がある.

- たとえば, 以下の信号 x を 1/3 にダウンサンプリングすることを考える.

$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$
6	5	4	3	2	1

x をエイリアシングを考慮せずに機械的に 1/3 にダウンサンプリングした信号を x_D とすると, $x_D[0] = 6$, $x_D[1] = 3$.

- x が z 変換可能であると仮定し, これを $1/D$ 倍にダウンサンプリングした信号を y とする. y も z 変換可能であると仮定し (収束領域は後で調べる), x と y の z 変換を X_Z, Y_Z とする.
- 天下り式であるが, $W = e^{-j2\pi/D}$ とおくと,

$$Y_Z(z) = \frac{1}{D}\sum_{l=0}^{D-1} X_Z(W^l z^{1/D})$$

である.

これを確認する. $k \in \mathbb{Z}$ に対し, k が D の整数倍であれば $W^k = 1$ であり, k が D の整数倍でないときには, $W^k \neq 1$ で, $\sum_{l=0}^{D-1} \left(W^k\right)^l = (1-W^{Dk})/(1-W^k) = 0$ である. $X_Z(W^l z^{1/D}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] W^{-nl} z^{-n/D}$ だから, 和の順番を入れ換えて $x[n]$ に関する項をまとめると (収束領域ではこれは可能),

$$\frac{1}{D}\sum_{l=0}^{D-1} X_Z(W^l z^{1/D}) = \frac{1}{D}\sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] \left(\sum_{l=0}^{D-1} W^{-nl}\right) z^{-n/D}$$

となる. n が D の整数倍のときには括弧内の和は D, それ以外の場合は零だから, $n = kD$ $(k \in \mathbb{Z})$ という項だけ残すと,

$$\frac{1}{D}\sum_{l=0}^{D-1} X_Z(W^l z^{1/D}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[kD] z^{-k} = Y_Z(z). = \sum_{k\in\mathbb{Z}} y[k] z^{-k} = Y_Z(z).$$

ダウンサンプリングと収束領域

再び, $R_1(x) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[n]|}$, $R_2(x) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[-n]|}$ とする. $nD = k$ とおくと, $n = k/D$ で, $n \to \infty$ なら $k \to \infty$ であり, $R_1(y) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|y[n]|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[nD]|} = \limsup_{k\to\infty} \left(\sqrt[n]{|x[n]|}\right)^{1/D} = (R_1(x))^(1/D)$, $R_2(y) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|y[-n]|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[-nD]|} = \limsup_{k\to\infty} \left(\sqrt[k]{|x[-k]|}\right)^{1/D} = (R_2(x))^(1/D)$ なので, 収束領域は

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : (R_1(x))^{1/D} < z < \frac{1}{(R_2(x))^{1/D}} \right\}$$

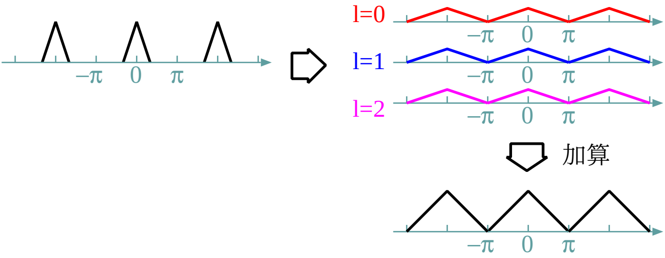
である. これが空集合でないと仮定しなければならない. この条件は, 信号が因果的な場合には後半の条件はなくなるので問題にならないが, 信号が因果的でない場合には制約的である.

- x と y の収束領域がともに単位円を含むものと仮定し, z に $e^{j\omega}$ を代入すると, x および y の周波数特性 ($X(\omega)$ と $Y(\omega)$ と書く) が得られる. $W^l z^{1/D} = e^{j\frac{1}{D}(\omega - 2\pi l)}$ だから,

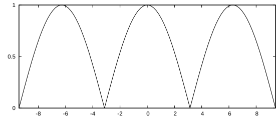
$$
\begin{aligned}
Y_Z\big|_{z=e^{j\omega}} &= \left.\frac{1}{D}\sum_{l=0}^{D-1} X_Z(W^l z^{1/D})\right|_{z=e^{j\omega}} \\
&= \frac{1}{D}\sum_{l=0}^{D-1} X\left(\frac{\omega - 2\pi l}{D}\right).
\end{aligned}
$$

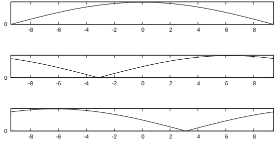
- $Y(\omega)$ は, $X(\omega)$ の高さを $1/D$ にして横に D 倍に伸ばしたものを, 2π の $0, 1, \ldots, D-1$ 倍横にずらし, これらをすべて足し合わせたもの.
- $[-\pi/D, \pi/D]$ の区間の外部で $X(\omega) = 0$ なら, $X(\omega)$ を横方向に原点を中心にして D 倍拡大した周波数特性が得られるが, それ以外の場合には歪みが発生する. 次ページに $D = 3$ の場合の例を示す.

ダウンサンプリングで問題が生じない場合(D=3)

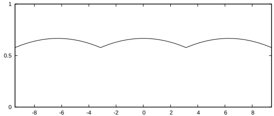


ダウンサンプリングで問題が生じる場合





$\Downarrow$ 加算



- ダウンサンプリングでエイリアシングによって波形が歪むことを防ぐためには, ダウンサンプリングに先立って, 低域通過フィルタによって信号 x の $[-\pi/D, \pi/D]$ 以外の周波数成分を零としておく必要がある.
- ダウンサンプラとこのような低域通過フィルタを組み合わせたものをデシメータと呼ぶ.

- 教科書ではアップサンプラとインターポレータ, ダウンサンプラとデシメータを区別していない. 文献によって用語の定義が異なるので注意せよ.
- 教科書では 134 ページでアナログ信号のイメージによってダウンサンプラの性質を説明しているが, 講義ではディジタル信号で話が閉じるように説明を変更した.

有理数比のサンプリング周波数変換

- サンプリング周波数を有理数比で変更するときには, デシメータとインターポレータを組み合わせて用いる.

アップ/ダウンサンプリングの性質

- アップサンプラおよびダウンサンプラは線形作用素である.
- 以下では, 説明の便宜上, 信号を $1/M$ にダウンサンプリングする作用素を $\mathcal{D}_M$, M 倍にアップサンプリングする作用素を$\mathcal{U}_M$ と書く.

- $\mathcal{U}_{M_1}\mathcal{U}_{M_2} = \mathcal{U}_{M_1 M_2} = \mathcal{U}_{M_2}\mathcal{U}_{M_1}$.
- $\mathcal{D}_{M_1}\mathcal{D}_{M_2} = \mathcal{D}_{M_1 M_2} = \mathcal{D}_{M_2}\mathcal{D}_{M_1}$.
- M_1 と M_2 が互いに疎のとき, $\mathcal{R}_{M_2/M_1}$ によって有理数比のサンプリング周波数変換作用素を表すことにすると, $\mathcal{D}_{M_1}\mathcal{U}_{M_2} = \mathcal{R}_{M_2/M_1} = \mathcal{U}_{M_2}\mathcal{D}_{M_1}$.

- フィルタ $H(z)$ は安定かつ線形時不変で, インパルス応答 h を持つものとする. $H(z)$ が定める作用素を $\mathcal{H}(z)$ と書き, アップサンプラやダウンサンプラとの直列接続を $\mathcal{U}_M\mathcal{H}(z)$, $\mathcal{D}_M\mathcal{H}(z)$ のように書く. このとき, 次の式が成り立つ:
  - ▷ $\mathcal{U}_M\mathcal{H}(z) = \mathcal{H}(z^M)\mathcal{U}_M$.
  - ▷ $\mathcal{H}(z)\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M\mathcal{H}(z^M)$.

$\mathcal{U}_M\mathcal{H}(z) = \mathcal{H}(z^M)\mathcal{U}_M$ の証明

$\mathcal{H}(z)[x]$ によって, 信号 x をフィルタ $H(z)$ に通した結果得られる信号を表す. z 変換作用素を $\mathcal{Z}[\cdot]$ とし, 上記を省略せずに書けば, $\mathcal{H}(z)[x] = \mathcal{Z}^{-1}\left[H(z)\mathcal{Z}[x]\right]$ である.
$\left(\mathcal{H}(z)[x]\right)[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k]x[n-k]$ であり, ゆえに

$$\left(\mathcal{U}_M\mathcal{H}(z)[x]\right)[t] = \begin{cases} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k]x[n-k], & t = nM, n\in\mathbb{Z} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

である. 一方,

$$\left(\mathcal{U}_M[x]\right)[t] = \begin{cases} x[n], & t = nM, n\in\mathbb{Z} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}.$$

$H(z^M)$ は線形時不変のフィルタで, そのインパルス応答を h_M とすると,

$$h_M[t] = \begin{cases} h[n], & t = nM, n \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

である. ゆえに,

$$\left(\mathcal{H}(z^M)\mathcal{U}_M[x]\right)[t] = \begin{cases} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k]x[n-k], & t = nM, n \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

となり, よって $\mathcal{U}_M\mathcal{H}(z) = \mathcal{H}(z^M)\mathcal{U}_M$ である.

$\mathcal{H}(z)\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M\mathcal{H}(z^M)$

$y_1 = (\mathcal{H}(z)\mathcal{D_M})[\S]$ とすると, $y_1[n] = \sum_{l\in\mathbb{Z}} h[l]x[(n-l)D]$. 一方, フィルタ $H(z^D)$ のインパルス応答は, $n = kD$ のとき $h[k]$, それ以外のとき零となるから $(k \in \mathbb{Z})$, $x_1 = \mathcal{H}(z^D)[x]$ とすると, $x_1[m] = \sum_{l\in\mathbb{Z}} h[l]x[m - lD]$. よって, $y_2 = \mathcal{D}_M\mathcal{H}(z^M)[x]$ とすると, $y_2[n] = x_1[nD] = \sum_{l\in\mathbb{Z}} h[l]x[nD - lD]$ となり, これらは一致する.

要注意!

○ $\mathcal{U}_M \mathcal{H}(z) = \mathcal{H}(z^M)\mathcal{U}_M, \mathcal{H}(z)\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M \mathcal{H}(z^M)$

× $\mathcal{U}_M \mathcal{H}(z) = \mathcal{H}(z)\mathcal{U}_M, \mathcal{H}(z)\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M \mathcal{H}(z)$

- フィルタ $H(z)$ とアップサンプラおよびダウンサンプラが可換にならないのは, アップサンプラおよびダウンサンプラが時不変作用素ではないから.

- $\mathcal{U}_M \mathcal{H}(z) = \mathcal{H}(z^M)\mathcal{U}_M$ および $\mathcal{H}(z)\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M \mathcal{H}(z$
という等式は, 以下で述べるポリフェーズフィルタを構成する際に利用する.

直接型構成

- デシメータでは信号とフィルタの係数との乗算をダウンサンプラの後に, インターポレータでは信号とフィルタの係数との乗算をアップサンプラの前にすることで, 信号に対する演算の内容を変えずに乗算を低いサンプリングレートで実行することができる (教科書図 12.7, 図 12.8). これらを直接型構成と呼ぶ.

ポリフェーズフィルタ

- リアルタイム信号処理において, 乗算を低いサンプリング周波数で実行するために, フィルタをポリフェーズ表現と呼ばれる形に分解表現することがある. このような構成をポリフェーズ構成, 対応するフィルタをポリフェーズフィルタと呼ぶ. 以下ではこれらについて述べる.

- 以下の議論はフィルタの次数には依存しないので, フィルタが無限次元で, l_1 に属する信号との畳み込みで表現されている場合を考える. フィルタの伝達関数を $H(z)$ とすると,

$$H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] z^{-n}$$

である.

- $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ とし，フィルタのインパルス応答を M ごとに使う次のような 2 種類のフィルタを考える．

$$E_k(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[Mn + k] z^{-n},$$

$$R_k(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[M(n+1) - k - 1] z^{-n},$$

$$k = 0, \ldots, M - 1$$

- フィルタ $H(z)$ のタイプ I のポリフェーズ表現とは, 次のような表現である.

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} E_k(z^M) z^{-k}$$

- $E_k(z)$ あるいは $E_k(z^M)$ を, $H(z)$ のポリフェーズフィルタと呼び, M を分割数と呼ぶ.

- フィルタ $H(z)$ のタイプ II のポリフェーズ表現とは, 次のような表現である.

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} R_k(z^M) z^{-M+1+k}$$

- $R_k(z)$ あるいは $R_k(z^M)$ を, $H(z)$ のポリフェーズフィルタと呼び, M を分割数と呼ぶ. タイプ I とタイプ II で同一の名称を用いる.

- 先に述べた $H(z^D)$ とダウンサンプラ, $H(z^U)$ とアップサンプラの順序交換の議論を思い出すとわかるように, フィルタをこのように分解表現することで, アップサンプラやダウンサンプラとポリフェーズフィルタの順序を交換することができ ($E_k(z)$ と $E_k(z^M)$, $R_k(z)$ と $R_k(z^M)$ が変わる; M は U か D のいずれか).

- ポリフェーズフィルタを用いたインターポレータおよびデシメータの構成を, これらの**ポリフェーズ構成**と呼ぶ(教科書 図12.9, 図12.10).

フィルタバンク

- フィルタバンクとは, 複数個のフィルタから構成されて全体としてある機能を持つシステムの総称で, 色々な種類があるが ⋯
- 入力信号から周波数軸に関し M 個に分割された信号を生成するフィルタバンクを帯域分割フィルタバンクまたはアナライザと呼ぶ.

- M 個の信号からひとつの信号を生成するフィルタバンクを, 帯域合成フィルタバンクまたはシンセサイザと呼ぶ.
- フィルタバンクには, アナライザだけのものと, アナライザおよびシンセサイザから成るものがある.

- また，フィルタバンクには，サンプリング周波数の変換を伴わないものと伴うものがあり，後者を前者と区別してマルチレートフィルタバンクと呼ぶ.
- 分割の数 M とサンプリング周波数の変換比が同一のマルチレートフィルタバンクを最大間引きフィルタバンクと呼ぶ.

- マルチレートフィルタバンクの典型的な応用であるサブバンド符号化について述べる.
- サブバンド符号化は, 音声や画像の圧縮に使われる技術のひとつで, 信号を量子化する際に, まず帯域分割し, 次に帯域のエネルギーの大きさに対応した量子化ビット数の割り付けをおこなうことで, 信号の品質を抑えつつデータ量を削減する技法.

- マルチレートフィルタバンクとサブバンド符号化による音声や画像の伝送では, 送信側は信号をアナライザで帯域分割してからサブバンド符号化による符号化して送信し, 受信側は受信信号を復号してからシンセサイザで復元して出力する, という流れになる.

- このような目的でマルチレートフィルタバンクを用いる場合には, アナライザとシンセサイザの複合系において, 復元信号が元の信号に一致するか, それを遅延させたものになっていることが望ましい. 前者を実現するものを**完全再構成フィルタバンク**または**完全 QMF バンク**, 後者を実現するものを **QMF バンク**と呼ぶ. QMF は quadrature mirror filter の略である.

- マルチレートフィルタバンクを構成する際には, M 分割フィルタバンクを構成してもよいし, 階層的に 2 分割フィルタバンクを構成してもよい. 後者を **2 分割フィルタバンクのトリー (tree) 構造**と呼ぶ.

- フィルタバンクには色々な設計法があり, 完全再構成の条件に関してもいろいろな議論があるのだが, 学部の講義で述べるにはテクニカルすぎる話題であると思われるので, この講義では述べない. 興味がある者は文献を参照せよ.