ディジタル信号処理
第 9 回
スペクトル推定

確定的信号と不規則信号

- 信号が各時刻に取る値が確率法則によらずに決定される信号を確定的信号あるいは確定信号と呼ぶ.
- 信号が各時刻に取る値が確率法則によって決まる信号を不規則信号と呼ぶ (確率過程という言葉が使われることもある).

- 確率事象に関する観測や実験をおこなうことを試行という.
- x を確定的信号とすると, $x[n]$ は数である.
- x を不規則信号とすると, $x[n]$ は試行がおこなわれるまで不確定で, 事前に与えられるのは $x[n]$ がしたがう確率分布である.

- 確定的信号を何回「再生」しても同じ数列が得られるのに対し, 不規則信号を複数回「再生」すると (試行に相当), 一般には, 得られる数列は毎回異なる.

- たとえば, 長さ 4 で値が 0 と 1 のいずれかの有限長信号が
    - ▷ 確定的信号なら, たとえば 0111 のように, 4 個の 0 あるいは 1 の数から成る列.
    - ▷ 不規則信号なら, たとえばコインを投げて数字の側が出たら 1, 絵の側が 0 という数字を設定する試行を 4 回繰り返すことで信号の値が決まる.

- 不規則信号を「再生する」あるいは「観測する」ことによって得られる数列を, 見本信号あるいは標本信号という.
- 時刻 n_0 を固定したとき, $x[n_0]$ は確率変数である. その期待値 (あるいは平均値) を $E[x[n_0]]$ と書く. これは集合平均 (信号のとり得る値はある確率分布にしたがうが, その確率分布に関する平均を取ったもの) である.

- $E[\cdot]$ は集合平均を取る演算子を表す.
- 不規則信号が各時刻でとり得る値がしたがう確率分布が時間軸に関する並行移動で不変であるとき, それを定常不規則信号と呼ぶ. それ以外の不規則信号を非定常不規則信号と呼ぶ
- この講義では定常不規則信号のみを取り扱う.

- 不規則信号が持っていると都合が良い性質のひとつに, エルゴード性と呼ばれる性質がある. エルゴード性には何通りかの定義があるが, この講義では, 確率変数 $x[n]$ の任意の関数の, 集合平均と, 任意の標本に関する時間平均とが一致することをエルゴード性と呼ぶことにする.
- 標本に関する時間平均は次ページで定義する.

- x をエルゴード性を持つ定常不規則信号であると仮定する.
- x を m 回目に観測した標本を $x_{(m)}$ とする.
- $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_{(m)}[n+k])$ を, 確率変数 $x[n]$ の標本に関する時間平均と呼ぶ.

- x は定常であると仮定したから, x の時刻 n における期待値 $E[x[n]]$ は時刻 n に依存しない. そこで, これを μ_x と書く.
- エルゴード性の仮定と組み合わせると,

$$\mu_x = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{(m)}[n+k]$$

が任意の標本 m および時刻 n に対して成立することになる.

- x がエルゴード性を持つ定常不規則信号としたとき, 期待値 μ_x が零でない場合には, $y[n] = x[n] - \mu_x$ によって新たな信号 y を定義すると, y はエルゴード性を持つ定常不規則信号で, その期待値は零となる.

- 今後の議論では, 別途断らない限り, 取り扱う信号はすべてエルゴード性を持つ定常不規則雑音であり, さらに期待値が零となるように前処理がなされているものと仮定する.

- 確率変数 $x[n]$ の関数として, $f(x[n], x[n+m_1], \ldots, x[n+m_l])$ のような多変数関数を考えることもある. この場合, 標本に関する時間平均は $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_{(m)}[n+k], \ldots, x_{(m)}[n+m_l+k])$ となる. 次の自己相関関数の定義でこの形を使う.

自己相関関数

- n_0 を固定したとき, x は定常だから, $\phi[m] = E[x[n_0]\overline{x}[n_0 - m]]$ が n_0 によらず定まる. そこで, これによって定義される関数 ϕ を x の自己相関関数と呼ぶ.
- $n_1 = n_0 - m$ とおけば, $\phi[m] = E[x[n_1 + m]\overline{x}[n_1]]$ とも書ける.

- n_0 と n_1 を n に書き直せば教科書 99 ページの形になる.
- 信号はエルゴード性を持つ定常不規則雑音であると仮定していたから, 標本 $x_{(m)}$ に対し,

$$\phi[m] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_{(m)}[n]\overline{x}_{(m)}[n-m].$$

である.

- 自己相関関数の形をよく見ると,

$$\phi[n-k] = E[x[n]\overline{x}[k]]$$

という形になっていることがわかる. この性質を後で利用する.

- 後で自己相関関数を離散時間フーリエ変換する必要があるので, $\phi \in l_1$ と仮定しておく.

パワースペクトル密度

- 信号 x がエルゴード性を持つ定常不規則雑音であり，$P_x = E[x^2[n]] < \infty$ と仮定する．定常性を仮定したから P_x は n に依存しない．
- エルゴード性から，標本 $x_{(m)}$ に対し，

$$P_x = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |x_{(m)}[n+k]|^2$$ である．

- P_x を信号 x の平均パワーと呼ぶ.
- 信号 $x_{(m)}$ は離散時間フーリエ変換できるとは限らないので, それを時刻 $[0, N-1]$ の範囲で打ち切った信号 $x_{(m)}^N$ を考える.

$$x_{(m)}^N[n] = \begin{cases} x_{(m)}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$ である.

- $x^N_{(m)}$ は離散時間フーリエ変換可能である. $x^N_{(m)}$ の離散時間フーリエ変換を $X^N_{(m)}$ と書く.
- パーセバルの公式が成り立つから ⋯
$$\sum_{n=0}^{N-1} \left|x^N_{(m)}[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X^N_{(m)}(\omega)\right|^2 d\omega.$$
- 上式の両辺を N で割って N が無限大の極限を取ると ⋯ (ただし極限と積分の順序が交換可能であると仮定する)

$$
\begin{aligned}
S_x &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| x_{(m)}^{N}[n] \right|^2 \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left| X_{(m)}^{N}(\omega) \right|^2}{N} d\omega.
\end{aligned}
$$

- 先の被積分関数の X から $\square_{(m)}$ を取り, 集合平均を取ったものをパワースペクトル密度と呼び, Φ という記号で表す. 極限と積分の順序が交換可能なら ⋯

$$
\begin{aligned}
\Phi(\omega) &= E\left[\lim_{N\to\infty} \frac{\left|X^N(\omega)\right|^2}{N}\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} E\left[\frac{\left|X^N(\omega)\right|^2}{N}\right]
\end{aligned}
$$

- 自己相関関数 ϕ が離散時間フーリエ変換可能で, かつ先に述べた極限と積分の順序の交換が可能であるという前提のもとで, パワースペクトル密度 Φ は自己相関関数 ϕ の離散時間フーリエ変換になっていることが示せる(ウィーナー・ヒンチンの定理)

ウィーナー・ヒンチンの定理の証明

- 教科書では見本信号 $x_{(m)}$ と信号全体 (x) が区別されていないため, 全体に意味不明になっているが, 講義資料ではこれらを区別する.
- 以下で, $\dfrac{\left|X_{(m)}^N(\omega)\right|^2}{N}$ を変形してゆく. 以下の計算では, 形式的にあらわれる無限和が, 非零の項は有限のため, 実質的には有限和であり, よって和の順序交換が自由にできることを使っている.

- $$\frac{\left|X_{(m)}^{N}(\omega)\right|^{2}}{N} = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_{(m)}^{N}[n]e^{-j\omega n}\overline{x_{(m)}^{N}}[l]e^{j\omega l}$$
  $$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} x_{(m)}[n]\overline{x_{(m)}}[l]e^{-j\omega(n-l)}$$
- 集合平均を取ると,

$$E\Big[\frac{\left|X_{(m)}^{N}(\omega)\right|^{2}}{N}\Big] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} E[x[n]\overline{x}[l]]e^{-j\omega(n-l)}$$

- $n-l=k$ とおく. $E[x[n]\overline{x}[l]]=\phi(n-l)$ であることと, n と l が 0 から $L-1$ まで動くとき, $n-l=k$ となる組み合わせが $N-|k|$ 個あること $(-(N-1)\le k\le N-1)$ を使うと,

$$E\Big[\frac{\left|X_{(m)}^{N}(\omega)\right|^2}{N}\Big]=\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\frac{N-|k|}{N}\phi(k)e^{-j\omega k}.$$

- $N \to \infty$ として,

$$\Phi(\omega) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|k|}{N} \phi(k) e^{-j\omega k}.$$

- $\left| \frac{N-|k|}{N} e^{-j\omega k} \right| \leq 1$ で, $\phi \in l_1$ だから,
  $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \sum_{|k|\geq M} |\phi(k)| < \varepsilon$ とできる. よって,

$$\left| \Phi(\omega) - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-M}^{M} \frac{N-|k|}{N} \phi(k) e^{-j\omega k}. \right| < \varepsilon.$$

- $N \to \infty$ とすると $|k| < M$ なら $\lim_{N\to\infty} \frac{N-|k|}{N} = 1$ だから,

$$\left| \Phi(\omega) - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-M}^{M} \phi(k) e^{-j\omega k}. \right| < \varepsilon.$$

- 同じ理由により, $\left| \mathcal{F}_{\mathrm{DTFT}}[\phi] - \sum_{k=-M}^{M} \phi(k) e^{-j\omega k} \right| < \varepsilon$ で, ε は任意だから,

$$\Phi = \mathcal{F}_{\mathrm{DTFT}}[\phi].$$

証明終わり

- $\frac{1}{N}\left|X^N_{(m)}(\omega)\right|^2$ は証明の最初の部分で $\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} x^N_{(m)}[n]\overline{x}^N_{(m)}[l]e^{-j\omega(n-l)}$ と書き直されたが, $n-l=k$ とおいて l を消去し, 和の順序を入れ換えると (非零の項は有限個なのでこれは可能) $\cdots$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x^N_{(m)}[n]\overline{x}^N_{(m)}[n-k]e^{-j\omega k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^N_{(m)}[n]\overline{x}^N_{(m)}[n-k]\right)e^{-j\omega k}
\end{aligned}
$$

- 先の括弧内の式を $r_{(m)}$ と書く.

$$r_{(m)}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(m)}^{N}[n] \overline{x}_{(m)}^{N}[n-k]$$

であるが, これは実質的には有限和で, $-N+1 \leq k \leq N-1$ でなければ $r_{(m)}[k] = 0$ である. 関数 $r_{(m)}$ をバイアスド標本自己相関関数あるいは単に標本自己相関関数, サンプル相関関数などと呼ぶ.

- $r_{(m)}$ の式を x に適用したものを r と書くことにすると, r は自己相関関数に類似しているが, $E[r[k]] = \frac{N-|k|}{N}\phi(k)$ であり, 期待値に $\frac{N-|k|}{N}$ の偏りが発生している.

- $r'_{(m)}[k] = \dfrac{N}{N-|k|} r_{(m)}[k]$ によって定まる関数 $r'_{(m)}$ をアンバイアスド標本自己相関関数と呼ぶ．これは上述の偏りを補正したもので，ゆえに $E[r'[k]] = \phi[k]$ となる．

- $P_{(m)} = \mathcal{F}_{\mathrm{DTFT}}[r_{(m)}]$ と定義し，これを標本パワースペクトル密度あるいはピリオドグラムと呼ぶ．先の証明からわかるように，

$$P_{(m)}(\omega) = \frac{\left|X_{(m)}^{N}(\omega)\right|^2}{N}$$

である．

- 窓関数を用いてピリオドグラムを変形したものを修正ピリオドグラムと呼ぶ．

- 不規則信号の自己相関関数あるいはパワースペクトル密度を知るということは応用上重要. とはいえ, 集合平均あるいは無限長の時間平均を取ることは困難なので, これを推定することが一般的.
- 不規則信号のパワースペクトル密度を推定することをスペクトル推定と言う.

- パワースペクトル密度を推定するためには, 標本自己相関関数を用いるのが直接的で, これを離散時間フーリエ変換して得られる標本パワースペクトル密度がパワースペクトル密度の推定値の候補になるが ⋯
- 標本パワースペクトル密度の分散は $N \to \infty$ としても零にならないことが知られている (ディジタル信号処理ハンドブック).

- このため, 変動を減らす目的で標本自己相関関数に平滑化処理してから離散時間フーリエ変換することでパワースペクトル密度の推定値とすることが一般的.

- (バイアスド) 標本自己相関関数を窓関数によって平滑化してから離散時間フーリエ変換したものをパワースペクトル密度の推定値とする方法をブラックマン･チューキーの方法と呼ぶ. 窓関数としては, 方形窓, 三角窓, ハミング窓, ハニング窓などが用いられる.

- 時間領域を複数の区間 (フレーム) に分割し, 各フレームで修正ピリオドグラムを求めてら, その平均を取ることでパワースペクトル密度の推定値とする方法をウェルチ法と呼ぶ.

- 教科書では 98 ページで l_2 を「二乗可積分」と呼んでいるが, この呼称は一般的でない. 多くの場合, l_2 という呼称が用いられる.
- 離散時間フーリエ変換のみを考えるのであれば信号が l_2 に属すると仮定してもよいが, 畳み込み演算を考える際には l_1 にしておいた方が都合が良い. $l_1 \subset l_2$ である.

白色雑音, ガウス過程

- 不規則信号 x が n 個の時刻 $t_1, \ldots, t_n$ で取る値を考える (n は任意).
- $x[t_1]$, …, $x[t_n]$ を確率変数と解釈したとき, これらが確率的に独立で, かつ各 $x[t_i]$ の確率分布がすべて同一であれば, x を白色雑音と呼ぶ.

- 任意の n と任意の $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ に対し, すべての i で $x[t_i] < \alpha_i$ となる確率が正規分布に従うとき, x を**ガウス過程**と呼ぶ. 応用上は定常ガウス過程が重要.
- これ以外に**マルコフ過程**という概念も重要であるが, この講義では名前を紹介するだけで, 内容には触れない.

以上の記述の典拠は ディジタル信号処理ハンドブック

- 白色雑音という言葉は確率分布に関する情報を含んでいないので注意.
- 確率変数を表記するときには英文字の大文字を使うのが一般的であるが, この講義では不規則信号を小文字で表記しているので, それを流用した.

線形予測分析

- 標本自己相関関数を用いたパワースペクトル密度の推定では, 不規則信号 x がどのようにして生成されるかには関心を払っていなかったが …
- 不規則信号は, 白色雑音を再帰型フィルタに通したもので近似できることが多い.

- このような場合には, 線形予測分析という方法でパワースペクトル密度を推定することができる.
- 伝達関数 $H(z) = \dfrac{1}{1+\alpha_1 z^{-1} + \cdots + \alpha_k z^{-k}}$ が安定で, 不規則信号 x が, 期待値零, 分散 σ の白色雑音 e をフィルタ H に通すことによって得られているものとする.

- 信号 x が生成される過程を差分方程式で表現すると, $x[n] = -\sum_{k=1}^{p} \alpha_p x[n-p] + e[n]$ である. (特定の標本を問題にしているわけではないので, 添字 $\square_{(m)}$ を付けていない).
- 教科書には記述がないが, H が安定 (すべての極が複素平面の単位円の内部にある) と仮定しないと, 線形予測分析は無意味である.

- 自己相関関数からパワースペクトル密度を求める場合, 自己相関関数のすべての時刻における値が必要になるが, 線形予測分析では有限個の時刻 $(0, \ldots, p)$ における自己相関関数の値からパワースペクトルを推定することができる (ただし最終的には標本相関関数で近似することになる).

- 以上で述べた不規則信号生成過程のモデルを自己回帰モデル，Auto-Regressive モデル，AR モデルなどと呼ぶ (フィルタの分類の用語とニュアンスが異なるので注意).
- AR モデルは, $\hat{x}[n] = -\sum_{k=1}^{p} \alpha_p x[n-p]$ という式で過去の信号の値から現在の信号の値を予測し, その予測誤差が $e[n]$ になっているとも解釈できる.

- この解釈に基づき, AR モデルを線形予測モデル, α_k を線形予測係数, e を線形予測残差信号あるいは残差信号と呼ぶことがある.

- この AR モデルにおける x と e のパワースペクトル密度の関係を調べる.
- x の自己相関関数を ϕ_{xx}, e の自己相関関数を ϕ_{ee} と書く. また, x と n が定常であるとき, $\phi_{xe}[n-k] = E[x[n]\overline{e}[k]]$ と定義する.
- ϕ_{xx}, ϕ_{xe}, ϕ_{ee} は離散時間フーリエ変換可能であると仮定し, これらの離散時間フーリエ変換を Φ_{xx}, Φ_{xe}, Φ_{ee} と書く.

$$
\begin{aligned}
\phi_{xx}[n] &= E\Big[x[l]\overline{x}[l-n]\Big] \quad (l \text{ は任意}) \\
&= E\left[x[l]\left(-\sum_{k=1}^{p}\overline{a}_p\overline{x}[l-n-p]+\overline{e}[l-n]\right)\right] \\
&= -\sum_{k=1}^{p}\overline{a}_p\phi_{xx}[n+p]+\phi_{xe}[n]
\end{aligned}
$$

両辺を離散時間フーリエ変換して,

$$
\left(1+\sum_{k=1}^{p}\overline{a}_p e^{j\omega p}\right)\Phi_{xx}(\omega)=\Phi_{xe}(\omega)
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_{xe}[n] &= E\left[x[l]\overline{e}[l-n]\right] \quad (l\text{ は任意}) \\
&= E\left[\left(-\sum_{k=1}^{p} a_p x[l-p] + e[l]\right)\overline{e}[l-n]\right] \\
&= -\sum_{k=1}^{p} a_p \phi_{xe}[n-p] + \phi_{ee}[n]\text{ よ}
\end{aligned}
$$

両辺を離散時間フーリエ変換して,

$$
\left(1+\sum_{k=1}^{p} a_p e^{-j\omega p}\right)\Phi_{xe}(\omega) = \Phi_{ee}(\omega)
$$

- よって, このフィルタの周波数応答を $H(\omega)$ と書くことにすると,

$$\Phi_{xx}(\omega) = |H(\omega)|^2 \Phi_{ee}(\omega).$$

- e は期待値零, 分散 σ の白色雑音と仮定したから, $\Phi_{ee}(\omega) = \sigma^2$ (定数). よって, 伝達関数 $H(z)$ の係数がわかれば, 不規則信号 x のパワースペクトル密度を計算することができる.

係数 $a_1, \ldots, a_p$ を求める方法

- AR モデルは実数値の信号を対象とすることが通例なので, 以下では信号 x, e およびフィルタの係数 $a_1, \ldots, a_p$ がすべて実数である場合を考える.
- 信号 x が定常で実数値なら, $\overline{x}[n] = x[n]$ より, $\phi_{xx}[m] = E[x[l]x[l-m]] = E[x[l-m]x[l]] = \phi_{xx}[-m]$. 以下ではこれを断りなく使う.

- $1 \le m \le p$ に対し，$\phi_{xx}[m] = \phi_{xx}[-m] = E[x[l-m]x[l]]$ であるが，$x[l]$ に AR モデルの差分方程式を代入すると次式が得られる．

$$\phi_{xx}[m] = E\left[x[l-m]\left(-\sum_{k=1}^{p} a_k x[l-k] + e[l]\right)\right]$$

- $x[l-m]$ は $e[l]$ に依存しないから $E\left[x[l-m]e[l]\right] = 0$．一方，$E\left[x[l-m]x[l-k]\right] = \phi_{xx}[k-m]$．これを使い，以上を連立一次方程式の形に纏めると …

$$
-\begin{pmatrix} \phi_{xx}[1] \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{xx}[p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{xx}[0] & \phi_{xx}[1] & & \phi_{xx}[p-1] \\ \phi_{xx}[1] & \phi_{xx}[0] & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ \phi_{xx}[p-1] & & & \phi_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}
$$

- 上記の方程式 (ユール・ウォーカーの方程式と呼ばれる) を $(a_1, \ldots, a_p)$ に関して解けば $(a_1, \ldots, a_p)$ が得られる.

- ユール・ウォーカーの方程式であらわれた行列は, 対角線の並行な方向に同じ数が並ぶ特殊な形を取っており, このような行列をテプリッツ行列と呼ぶ.
- 実用上は, 自己相関関数を厳密に求めることは困難なので, 標本相関関数で代用する.

- 連立一次方程式を解くこと自体は困難ではないが …
- テプリッツ行列の性質を用いると, より少ない計算量でユール・ウォーカーの方程式を解くことができる. この解法をレビンソン・ダービンの解法と呼ぶ. 技術的なので今回の講義では詳細は述べない (教科書参照, ただし記述の誤りに注意).

PARCOR 法

- レビンソン・ダービンの解法と等価な別の定式化に, **PARCOR 法**と呼ばれる方法がある.
- AR モデルは過去の $p-1$ 個の時刻における信号の値から現在の信号の値を予測するものであるが(これを**前向き予測**と呼ぶ). 同様の考え方で, 時刻 $n, \ldots, n-p-1$ における信号の値から時刻 $n-p$ における信号の値を「予測」する式を書き下すことも可能(これを**後向き予測**と呼ぶ),

- **PARCOR 係数**は, 前向き予測誤差と後向き予測誤差の相関係数として定義される. PARCOR 係数と AR モデルの係数を逐次的に求める手法が **PARCOR 法**である.
- PARCOR 法はレビンソン・ダービンの解法と等価なので詳細は述べない. 興味がある者はディジタル信号処理ハンドブックなどを参照せよ.