ディジタル信号処理

第 8 回

ディジタルフィルタ

フィルタとは

- 一般的な英単語 "filter" の意味は次の通り: 濾過器, 濾過板, 水こし, 濾紙, (タバコの) フィルター, (写・光) フィルター, 濾光器, フィルター (典拠はリーダーズ英和辞典).

- 物理/工学の分野での「フィルタ」の意味は次の 2 通り (典拠はブリタニカ国際大百科事典).
  - ▷ 白色光源などから特定の波長領域の光だけを取り出す光学素子.
  - ▷ 特定の周波数だけの交流信号を通し, 他の周波数のものは通さないようにした回路.

- 信号処理の分野では,「フィルタ」という言葉は, 信号からの不要な要素の除去や信号の特定の箇所を強調などをおこなう装置, 回路, プログラムなどのことを指すことが多い.
- 日常語では「フィルター」という言葉が使われることが多いが, 工学では「フィルタ」という言葉が使われることが多い.

- フィルタは**アナログフィルタ**と**ディジタルフィルタ**の 2 種類に大別される.
- アナログフィルタは, アナログ信号を処理の対象とし, アナログ回路や素子などから成るフィルタである.

- ディジタルフィルタという言葉は, 次の 2 通りの意味で用いられる.
  - ▷ ディジタル信号を処理の対象とし, ディジタル回路や素子から成るフィルタ
  - ▷ アナログ信号を処理の対象とし, ディジタル回路や素子およびディジタルとアナログのインターフェースから成るフィルタ

- アナログ信号の処理にディジタルフィルタを用いることの利点は, アナログ信号処理に対するディジタル信号処理の利点と同一. 簡単にまとめると, 低コストで高度・高品質・柔軟な処理が可能で開発が容易. ただし, ディジタルとアナログのインターフェースの部分にアナログ素子が必須であることは注意を要する.

ディジタルフィルタの分類

- 独立変数に関する分類
  - ▷ 時間領域のフィルタ
  - ▷ 周波数領域のフィルタ (こちらが一般的)

- フィルタの構造に関する分類
  - ▷ 時不変/時変フィルタ
  - ▷ 線形/非線形フィルタ

- 利用目的に関する分類
  - ▷ 信号の特定の周波数成分を選択する
  - ▷ 信号から雑音を除去する
  - ▷ 信号を復元する
  - ▷ 信号を予測・補間する
  - ▷ (他にも色々なものがあり得る)

- 線形時不変なフィルタのインパルス応答から見た分類
  - ▷ インパルス応答が有限時間経過後に恒等的に零となるフィルタ (Finite Impulse Response(FIR) フィルタ)
  - ▷ インパルス応答が有限時間経過後に恒等的に零となることがないフィルタ (Infinite Impulse Response(IIR) フィルタ)

周波数選択性フィルタ

- フィルタの中でもよく使われるのは, 周波数選択性フィルタと呼ばれるフィルタ.
- これは, 線形時不変のフィルタであって, 信号のうち特定の周波数成分を通過させ, 特定の成分を阻止するもので, ディジタルフィルタ, アナログフィルタでともに用いられる.
- 代表的なものは次の 4 種.

- 低域通過フィルタ (ローパスフィルタ;**Low-Pass Filter;LPF**)
- 高域通過フィルタ (ハイパスフィルタ;**High-Pass Filter;HPF**)
- 帯域通過フィルタ (バンドパスフィルタ;**Band-Pass Filter;BPF**)
- 帯域阻止フィルタ (バンドエリミネーションフィルタ;**Band-Elimination Filter;BEF**)

- **低域通過フィルタ**: 信号の低周波成分のみ通過させるフィルタ. 理想的には振幅スペクトルが低周波域で 1, 高周波域で零. 低周波域と高周波域の周波数は設計次第 (以下同じ).
- **高域通過フィルタ**: 信号の高周波成分のみ通過させるフィルタ. 理想的には振幅スペクトルが高周波域で 1, 低周波域で零.

- 帯域通過フィルタ: 信号の指定した帯域の周波成分のみ通過させるフィルタ. 理想的には振幅スペクトルが指定した帯域で 1, それ以外で零.
- 帯域阻止フィルタ: 信号の指定した帯域の周波成分のみ遮断するフィルタ. 理想的には振幅スペクトルが指定した帯域で零, それ以外で 1.

- 以上では位相特性については述べなかったが, 理想的には**直線位相**と呼ばれる性質を持つことが望ましい (後述).
- 信号を通過させたい帯域を**通過域**, 阻止したい帯域を**阻止域**と呼ぶ.
- フィルタを設計する際には, 通過域と阻止域のあいだに**過渡域**あるいは**遷移域**と呼ばれる特性を指定しない領域を設ける必要がある.

- 応用でよく用いられるフィルタは実数のインパルス応答を持つが, そのようなフィルタの周波数特性は, 前回の講義で述べたように, 周波数軸上の原点に関して対称性を持つ.
- 今まで述べてきた「周波数応答」は離散時間フーリエ変換を前提としたおり, 周期 2π の周期関数である. また, 周波数領域として区間 $[-\pi, \pi]$ を取ることが一般的である.

- この $[-\pi, \pi]$ の範囲の独立変数は, 正確には正規化角周波数であるが, フィルタの設計の際には, 独立変数を単に周波数と呼ぶことが多い. たとえば, 後で出てくる通過域端周波数という言葉が, 通過域端正規化周波数と呼ばれることはない. 繁雑さを避けるため以下でも周波数という用語を用いるが, これは正式には正規化角周波数である.

- さらに，「低域通過フィルタ」や「高域通過フィルタ」という言葉は，「周波数の絶対値が低い (あるいは高い) 信号を通過させるフィルタ」という意味で用いられる．よって，低域通過域は「原点に近い部分に通過域を持ち $\pm\pi$ に近い部分に阻止域を持つフィルタ」，高域通過フィルタは「$\pm\pi$ に近い部分に通過域を持ち原点に近い部分に阻止域を持つフィルタ」と解釈される．

- ディジタルフィルタでアナログ信号を処理するときの注意を述べる.
- 信号 x に対し, $\Omega_B = \sup\{|\Omega| : X_{\mathrm{FT}}(\Omega) \neq 0\}$ としたとき, (X_{FT} は信号 x のフーリエ変換), x を帯域制限信号と呼び, $2F_B = \Omega_B/\pi$ を信号 x のナイキストレートと呼んだ.
- ディジタルフィルタのサンプリング周波数を F_s とする.

- ディジタルフィルタで正しい処理がおこなえるためには, $2F_B < F_s$ である必要があった. ディジタルフィルタでは, サンプリング周波数を無限に大きくすることはできないから, 何らかの方法で処理したい信号を帯域制限してから, それに相応しいサンプリング周波数を選択することになる. **この帯域制限自体はディジタルフィルタではできないので, アナログフィルタに頼ることになる.**

FIR フィルタと IIR フィルタ

- FIR フィルタは通常は線形時不変で因果的な非再帰型システムの形で実現される．一方，IIR フィルタは通常は線形時不変で因果的な再帰型システムの形で実現される．いずれの場合も，システムの含まれる遅延阻止の最大次数を**フィルタの次数**と呼ぶことが多い．
- これらの利点と欠点は $\cdots$

- FIR フィルタ
  - ▷ 利点: つねに安定で, 安定性に注意して設計する必要がない; 直線位相のフィルタを実現しやすい.
  - ▷ 欠点: 過渡域が狭いフィルタを作るためにはフィルタの次数を高くする必要がある.

- IIR フィルタ
  - ▷ 利点: FIR フィルタと比べて低い次数で過渡域が狭いフィルタを作ることできる.
  - ▷ 欠点: 必ずしも安定にならないので安定性に注意して設計する必要がある; 直線位相のフィルタを実現しにくい.

- 以下では, 非再帰型システムによって構成されたフィルタを**非再帰型フィルタ**, 再帰型システムによって構成されたフィルタを**再帰型フィルタ**と呼ぶことにする.
- 非再帰型フィルタは必ずFIR フィルタになるが ⋯
- 再帰型フィルタは, IIR フィルタになることもあり, FIR フィルタになることもある.

- 厳密には
  - ▷ FIR フィルタ: 非再帰型フィルタと一部の再帰型フィルタ
  - ▷ IIR フィルタ:残りの非再帰型フィルタ
- 多くのディジタル信号処理の教科書で, FIR/IIR という分類と, 非再帰型/再帰型という分類を混同している.

理想フィルタ

- その周波数特性以下の条件を満たす周波数選択性フィルタを理想フィルタという．
  - ▷ 通過域では振幅一定値で直線位相
  - ▷ 阻止域では振幅零
  - ▷ 過渡域なし

- 有限次元のフィルタによって理想フィルタを実現することは一般には困難.
- 理想フィルタを近似するというというのがフィルタの設計の考え方のひとつ.

周波数選択性フィルタの設計仕様

- 教科書ではフィルタの設計仕様 (性能に関する要求事項) について説明されていないので, 樋口, 川又 (2000) に従ってフィルタの設計仕様について述べる.
- 以下の議論では, 低域通過フィルタを例に取って, 周波数選択性フィルタの設計仕様について議論する.

- 高域通過フィルタ, 帯域通過フィルタ, 帯域阻止フィルタについては, 低域通過フィルタと同様に考えてもよいし, 周波数変換と呼ばれる手法で低域通過フィルタから変換されると考えてもよい (詳細は樋口, 川又 (2000)).
- 以下では樋口, 川又 (2000) に従い, 横軸の変数を「周波数」と呼ぶが, これは厳密に言えば正規化角周波数であることを改めて注意する.

- 周波数領域 $[0, \pi)$ において低域通過フィルタの設計仕様を与えることを考える.
- 以下で設計仕様に関連した用語を定義する. 設計仕様はこれらのいくつかを使って指定される.
- 低域通過フィルタなので, その周波数特性は周波数に関する偶関数であることを前提とし, 負の周波数では仕様を与えない.

- 信号を通過させたい帯域を, $\omega \in [0, \omega_p]$ とする．この帯域を通過域と呼ぶ．ω_p を通過域端周波数と呼ぶ.
- 通過域では, 振幅特性 $A(\omega)$ がちょうと1であることが理想であることを踏まえ, $1-\delta_p \leq A(\omega) \leq 1+\delta_p$ という仕様を与える．δ_p を通過域の許容量, 振幅特性が $1 \pm \delta_p$ の許容範囲を通過域リップルと呼ぶ.

- 信号を遮断したい帯域を, $\omega \in [\omega_s, \pi)$ とする. この帯域を阻止域と呼ぶ. ω_s を阻止域端周波数と呼ぶ.
- 通過域では, 振幅特性 $A(\omega)$ がちょうど零であることが理想であることを踏まえ, $A(\omega) \leq \delta_s$ という仕様を与える. δ_p を通過域の許容量, 振幅特性が δ_s 以下の許容範囲を阻止域リップルと呼ぶ.

- $\omega \in (\omega_p, \omega_s)$ の領域を**過渡域**あるいは**遷移域**と呼ぶ.
- 振幅特性の最大値を $A_{\max}$ としたとき, $A(\omega)/A_{\max} = 1/\sqrt{2}$ となる最小の正の ω を**遮断周波数**と呼ぶ(が, 通過域リップルの値次第ではおかしな値になり得る). 遷移領域のない理想フィルタでは通過域と阻止域の境界を指すためにこの言葉が使われることもある.

- $-20\log_{10} A(\omega)/A_{\max}$ を ω における減衰量と呼ぶ． 単位は dB である． 10 でなく 20 を乗ずるのが慣例である． フィルタでは上記のように全体にマイナスを掛けるのが慣例だが, 増幅器ではマイナス記号を掛けないのが慣例である． 先に述べた $1 \pm \delta_p$ ではなく $-20\log_{10}(1-\delta_p)/(1+\delta_p)$ の方を通過域リップルと呼ぶこともある．$-20\log_{10}\delta_s/(1+\delta_p)$ を阻止域減衰量と呼ぶ．

フィルタの仕様の与え方

- **絶対仕様**と呼ばれる仕様では, 以下の値をフィルタの性能の数値目標として設定する:
  通過域端周波数 w_p, 通過域リップル δ_p, 阻止域端周波数 ω_s, 阻止域リップル δ_s

フィルタの仕様の与え方

- フィルタの**相対仕様**と呼ばれる仕様では, ω_p と ω_s の値を数値目標として設定することは絶対仕様と同じであるが, δ_p の値のかわりに $-20\log_{10}(1-\delta_p)/(1+\delta_p)$ の値を, δ_s の値のかわりに $-20\log_{10}\delta_s/(1+\delta_p)$ の値を数値目標として設定する.

直線位相

- 振幅特性が一定の線形時不変フィルタに複数の正弦波が重ね合わされた信号を通したとき，縦方向の伸縮出力および時間のずれを除き，入力波形と出力波形が同一になるための条件を考える．

- 議論の簡単のため, フィルタの振幅特性が全周波数で一定値 A, 位相特性が $\theta(\omega)$ であるものとする.
- 天下り的であるが, $\theta(\omega) = a\omega + b$ (a, b は実数) となっていたものとする.
- 入力を $\displaystyle\sum_{k=1}^{L} c_k e^{j\omega_k n}$ とすると, 出力は $\cdots$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{L} Ac_k e^{j\omega_k n} e^{j\theta(\omega_k)} &= \sum_{k=1}^{L} Ac_k e^{j\omega_k n} e^{j(a\omega_k+b)} \\
&= Ae^{jb} \sum_{k=1}^{L} c_k e^{j\omega_k(n+a)}.
\end{aligned}
$$

- $\theta(\omega) = a\omega + b$ となっていれば，出力は，入力を時間軸に関して $-a$ ずらし，かつ全体にある複素数 Ae^{jb} を乗じたものになるため，入力と出力は「波形」という観点では相似形である．
- $\theta(\omega) = a\omega + b$ となっていることと $\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = a$ であることは等価だから (b の値は重要でない) $\cdots$

- 信号を線形時不変フィルタに通したとき波形が歪まないための十分条件は, $\dfrac{d\theta(\omega)}{d\omega}$ が ω によらず一定値になることである.
- $\dfrac{d\theta(\omega)}{d\omega}$ を**郡遅延**という. また, 郡遅延が ω によらず一定であることを**直線位相** (あるいは**線形位相**) という. このとき $\theta(\omega) = a\omega + b$ となることから, 直線位相という言葉を使う理由は明らかであろう.

- たとえば矩形波 (を帯域制限の範囲で近似したもの) をフィルタに通した場合, 矩形波の近似は多くの周波数成分を含むが, フィルタが直線位相でない場合には, 各周波数成分が時間軸方向にばらばらにずれるため, 波形自体が歪む. このような現象を位相歪みという.

- 直線位相のフィルタではこのような現象は顕著ではない．このため, 波形自体に重要な情報が含まれる場合には, 直線位相を実現することが重要となる．
- とはいっても, 現実的には, 振幅特性を一定にすることは困難なので, 直線位相を実現しても, 振幅特性の周波数依存性のために, 波形は歪む．

- 応用上取り扱いやすいのは非再帰型フィルタなので, 因果的な非再帰型フィルタによって直線位相が実現できるかという問題を考える.
- 次数 N の非再帰型フィルタ (FIR フィルタ) が次のような入出力関係を持つものとする:

$$y[n] = \sum_{l=0}^{N-1} h[l]u[n-l].$$

ただし, u は入力, y は出力である.

- このフィルタが一般化された意味で直線位相となるための十分条件は, $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ としたとき, 次のいずれか一方が満たされることである.
  - $\forall k, h[k] = h[N-1-k]$ (偶対称と呼ぶ)
  - $\forall k, h[k] = -h[N-1-k]$ (奇対称と呼ぶ)

- 「一般化された意味で直線位相」とは, 位相が $\pm\pi$ 不連続に変化すること (波形の上下反転) を許容するという意味である．この言葉は Oppenheim & Schafer, 2010 で使われている．条件を緩めない「直線位相」は, 以下で述べる方法では必ずしも実現できない.

- 非巡回型フィルタの係数 h が偶対称あるいは奇対称になっていると仮定する.
- N が奇数のときは, $C = (N-1)/2$ とおき, 以下のように定義する.

    ▷ $a_0 = h[C]$,

    ▷ $a_k = 2h[C-k]\ (1 \le k < C)$.

- N が偶数のときは, 次のように定義する.

  $b_k = 2h[N/2-k]$, $0 \le k < N/2$.

- このフィルタの周波数特性を $H(\omega)$, 一般化された振幅特性を $\Gamma(\omega)$, 一般化された位相特性を $\psi(\omega)$ とすると, このフィルタは一般化された意味で直線位相: $\psi(\omega) = -\dfrac{N-1}{2}\omega + b$ となる. $\Gamma(\omega)$, b の値は以下の通り.

「一般化された振幅特性」は振幅特性に正負の符号をつけたものである. $H(\omega) = A(\omega)e^{j\theta(\omega)} = \Gamma(\omega)e^{j\psi(\omega)}$ で, $A(\omega) = |\Gamma(\omega)|$ で, $\Gamma(\omega) \geq 0$ なら $\theta(\omega) = \psi(\omega)$ だが, $\Gamma(\omega) < 0$ なら $\theta(\omega) = \psi(\omega) \pm \pi$ である ($\pm\pi$ の正負は議論に都合が良いように付ける).

(タイプ 1) N が奇数, h が偶対称のとき:

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=0}^{(N-1)/2} a_k \cos(\omega k),\ b = 0$$

(タイプ 2) N が偶数, h が偶対称のとき:

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=0}^{N/2} b_k \cos(\omega(k - \frac{1}{2})),\ b = 0$$

(タイプ 3)　N が奇数, h が奇対称のとき:

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=0}^{(N-1)/2} a_k \sin(\omega k),\ b = \frac{\pi}{2}$$

(タイプ 4)　N が偶数, h が奇対称のとき:

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=0}^{N/2} b_k \sin(\omega(k - \frac{1}{2})),\ b = \frac{\pi}{2}$$

証明 (1) N が奇数で h が偶対称のとき

- フィルタのインパルス応答は $k = C$ を中心とした偶関数である.
- フィルタの周波数応答は $H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]e^{-j\omega k}$ であるが, $k = C$ を中心としてこれを書き直すと,

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= e^{-j\omega C}\left(h[C] + \sum_{k=1}^{C} h[C-k](e^{j\omega k} + e^{-j\omega k})\right) \\
&= e^{-j\omega C}\left(a_0 + \sum_{k=1}^{C} a_k \cos(\omega k)\right)
\end{aligned}
$$

- 改めて書き直すと ($C = (N-1)/2$ と $\cos 0 = 1$ に注意),

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} a_k \cos(\omega k)$$

$$\psi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

証明 (2) N が奇数で h が偶対称のとき

- $C = (N-1)/2$ とする．フィルタのインパルス応答は $k = C$ を中心とした偶関数であるが C は整数ではない．
- フィルタの周波数応答は $H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]e^{-j\omega k}$ であるが, $k = C$ を中心としてこれを書き直すと,

$$H(\omega) = e^{-j\omega C}$$
$$\times \left(\sum_{k=1}^{C+\frac{1}{2}} h[C-k+\frac{1}{2}](e^{j(\omega(k-\frac{1}{2}))} + e^{-j(\omega(k-\frac{1}{2}))}) \right)$$

- $C+1/2=(N-1)/2+1/2=N/2$ を使うと

$$H(\omega)=e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{N/2}h[\frac{N}{2}-k](e^{j(\omega(k-\frac{1}{2}))}+e^{-j(\omega(k-\frac{1}{2}))})\right)$$

$$=e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{N/2}b_k\cos(\omega(k-1/2))\right)\quad \text{だから}$$

$$\Gamma(\omega)=\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}b_k\cos\left(\omega(k-\frac{1}{2})\right)$$

$$\psi(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega$$

証明 (3) N が奇数で h が奇対称のとき

- フィルタのインパルス応答は $k = C$ を中心とした奇関数である．したがって，$h[C] = 0$ である．
- フィルタの周波数応答は $H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]e^{-j\omega k}$ であるが，$h[C] = 0$ に注意しつつ $k = C$ を中心としてこれを書き直すと，

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= e^{-j\omega C}\left(h[C] + \sum_{k=1}^{C} h[C-k](e^{j\omega k} - e^{-j\omega k})\right) \\
&= e^{-j\omega C}\left(\sum_{k=1}^{C} ja_k \sin(\omega k)\right).
\end{aligned}
$$

- $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ を利用して改めて書き直すと $(C = (N-1)/2$ に注意),

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} a_k \sin(\omega k)$$

$$\psi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2}$$

証明 (4) N が奇数で h が奇対称のとき

- $C = (N-1)/2$ とする．フィルタのインパルス応答は $k = C$ を中心とした偶関数であるが C は整数ではない．
- フィルタの周波数応答は $H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] e^{-j\omega k}$ であるが, $k = C$ を中心としてこれを書き直すと,

$$H(\omega) = e^{-j\omega C}$$

$$\times \left(\sum_{k=1}^{C+\frac{1}{2}} h[C - k + \frac{1}{2}] (e^{j(\omega(k-\frac{1}{2}))} - e^{-j(\omega(k-\frac{1}{2}))}) \right)$$

- $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ と $C + 1/2 = (N-1)/2 + 1/2 = N/2$ を使うと

$$H(\omega) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{N/2} h[\frac{N}{2} - k](e^{j(\omega(k-\frac{1}{2}))} - e^{-j(\omega(k-\frac{1}{2}))})\right)$$

$$= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} j\left(\sum_{k=1}^{N/2} b_k \sin(\omega(k - 1/2))\right) \quad \text{だから}$$

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k \sin\left(\omega(k - \frac{1}{2})\right)$$

$$\psi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2}$$

ディジタルフィルタの構成

- ディジタルフィルタが利用され始めた頃は, 回路上に遅延素子などをならべてフィルタを構成することもあり, そのような場合には, 素子をどのように並べるかが問題になった. 典型的な構成法が教科書図 8.5 および 8.5 にある.

- 名前だけ挙げると非再帰型フィルタの場合は直接型構成と転置型構成, 再帰型フィルタの場合は直接型構成 (1), 直接型構成 (2), 転置型構成という構成法がある．遅延素子が少ない構成の方が有用ではあるが …
- 今日のディジタルフィルタはふつうはコンピュータ上のプログラムなので, フィルタの構成に関する回路的な議論は無意味.

フィルタの設計法について

- 多くの場合, 設計すべきフィルタは線形時不変かつ因果的で, 有限次元である.
- フィルタの設計法は色々あり, 非再帰型フィルタの設計法のひとつは窓関数を用いる方法で, 再帰型フィルタの設計法にはインパルス不変法や双一次変換などといった方法がある.

- この講義では, 個別のフィルタの設計法については, 後半で時間に余裕があれば取り上げる.