ディジタル信号処理

第 6 回

z 変換

z 変換とは何か

- 離散時間フーリエ変換は, 信号 x に対し, $X(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]e^{-jn\omega}$ によって $[0, 2\pi)$ において定義される関数 X (あるいはそれを周期 2π の周期関数に拡張したもの) を対応させる変換だった.
- $e^{j\omega}$ が複素平面の単位円上の点であることに注目する.

- z を複素平面の単位円上の点ではなく一般の複素数とし,

$$X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] z^{-n}$$

によって関数 X を定めるのが z 変換であるが $\cdots$

- z 変換については述べるべきことが色々ある.
- 教科書の記述は数学的に不十分なので, 既に挙げた文献に従って説明を補いつつ講義を進める.
- 今回の講義では電気数学 IV で解説した複素関数論の定理を使う.

z 変換の定義

- 信号 $x = (x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ を無限長の信号とする. 信号 x の両側 z 変換とは, 次式によって定まる形式的冪級数である:

$$\mathcal{Z}[x] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] z^{-n}.$$

- 因果的な信号 $x = (x[n])_{n\in\mathbb{N}}$ の信号 x の片側 z 変換とは, 次式によって定まる形式的冪級数である:

$$\mathcal{Z}[x] = \sum_{n\in\mathbb{N}} x[n] z^{-n}.$$

- 因果的な信号を $n < 0$ においてその値が恒等的に零となる信号と解釈すると，片側 z 変換は両側 z 変換と一致する．今回の講義では，常にこの解釈を採用する．

- 同様に，有限長信号についても，その値が指定された範囲外では恒等的に値が零となる無限長信号と解釈する．

- 信号を z 変換する作用素を $\mathcal{Z}[\cdot]$ と書く.
- 以下しばらく, $X_Z = \mathcal{Z}[x]$ のように, z 変換前の信号は英文字の小文字で書き, z 変換後の信号は対応する大文字に右下付き添字 $\square_Z$ を付けて表す.
- 両側 z 変換, 片側 z 変換ともに z 変換と呼ばれることがある. どちらの意味かは文脈で判断するしかない.

- 片側 z 変換は両側 z 変換において $n < 0$ のとき $x[n] = 0$ とした特別な場合なので，記号的には両側 z 変換と片側 z 変換を区別する必要はない．後述する逆 z 変換も，見掛け上は両側 z 変換と片側 z 変換で共通である．ただし無限級数が絶対収束する領域が異なるので注意が必要．

- 片側 z 変換の方が両側 z 変換より用いられる機会が多い．しかし, 信号処理では, 必ずしも因果的な処理のみを対象とするわけではないので, 両側 z 変換が取り扱われることも多い．たとえば, 記録済みの信号を加工する際には, リアルタイム処理ではないので, 処理が因果的かどうかを気にする必要はない．理論との整合性という観点から言うと, 信号が有限長であることの方が重要.

- 片側 z 変換, 両側 z 変換とも, 複素関数論で学んだローラン級数の形になっている. したがって, これらが絶対収束するか否かが問題となる. 絶対収束しない場合には, 逆 z 変換 (後述) によって信号の値を復元することはできない.
- まず両側 z 変換について考える.

- 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$ に着目する．$1/z = w$ と変数変換すると, この無限級数は $\sum_{n=0}^{\infty} x[n]w^n$ のように書き換えられる．後者の収束半径は (複素関数論の講義を思い出すと)

$$r_1 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[n]|}}$$ である．

- $|w| < r_1$ のとき先の無限級数は絶対収束する. したがって, $w = 1/z$ より, $|z| > 1/r_1$ のとき, もとの無限級数は絶対収束する. すなわち,

$$R_1 = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[n]|}$$

とすると, $|z| > R_1$ で無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$ は絶対収束する.

- 次に, 無限級数 $\sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n}$ に着目し, これが絶対収束すると仮定した上で収束半径を求める. $-n = k$ とおくと, 収束円の内部では和の順番を入れ換えられるから, 先の無限級数は $\sum_{k=0}^{\infty} x[-k]z^{k}$ となる. この収束半径は $R_2 = \dfrac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|x[-k]|}}$ となる. $z < R_2$ であれば, 和の順番の交換が可能だから, 先に述べた操作は正当化される.

- $R_1 < |z| < R_2$ であれば, 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$ において和の順番を入れ換えても結果が変わることはないから, 上述の手順はすべて正当化される. 結果として, 以下の条件が満たす範囲において, 信号 x の z 変換は絶対収束し, X_z はこの領域 (D_x と書き, x の収束領域と呼ぶ) で正則な関数を定める.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[n]|} < |z| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[-n]|}}.$$

- 収束の条件には注意が必要.
- $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[n]|} > \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[-n]|}}$ となっている場合には, $D_x = \emptyset$, すなわち z 変換は収束しない. このため, 両側 z 変換は必ずしも取り扱いやすくない.
- ただし, 有限長信号 x(上述のように有限個の項を除き $x[n] = 0$ となる信号と解釈) では $D_x = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ となる.

- 片側 z 変換では, 先の議論で $n < 0$ の部分を考慮する必要はないから, 絶対収束の十分条件は

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[n]|} < |z|$$

となる．この領域を D_x と書き, x の収束領域と呼ぶ.

- 理論的には $D_x = \{\infty\}$ ということもあり得るが(空集合にはならない), 応用上は稀で $\cdots$

- 因果的な信号 x は, ある $r \geq 0$ および $C \geq 0$ に対して $|x[n]| \leq Cr^n$ となるとき, **指数関数によって上から押さえられる**という (便宜上 $0^0 = 1$ とおく).
- 信号 x が指数関数によって上から押さえられるとき, 定義にしたがって計算すると, D_x は $\{z : |z| > r\} \neq \emptyset$ となる.
- 有限長信号では, $D_x = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ である.

- 因果的な線形システムの解は指数関数によって上から押さえられるから (後述), 片側 z 変換については, 線形システムを対象とする限りにおいて, 片側 z 変換を用い, z 変換された領域で信号の加工や解析をおこなうことは, 複素平面から原点を中心とする十分大きい円を除いた領域では正当ということがいえる.
- 両側 z 変換にはこのような良い性質はない.

まとめると …

- 片側 z 変換は, 因果的な線形システム, 有限長信号, 指数関数によって上から押さえられる信号に対して常に空でない収束領域を持つ.
- 両側 z 変換は, 有限長信号に対して空でない収束領域を持つが, それ以外の場合には収束領域に注意が必要.

逆 z 変換

- $D_x \neq \emptyset$ のとき, $X_Z = \mathcal{Z}[x]$ は D_x における正則関数で, x を z 変換する式は X_z のローラン展開だから, X_Z を逆 z 変換するにはローラン展開の係数を求めればよい.

D_x の定義を思い出すこと:

$$D_x = \left\{ z : \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[n]|} < |z| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[-n]|}} \right\}$$

- 複素関数論で学んだように, ローラン級数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ が原点を中心とする円環上の領域で収束するとき, C を原点を中心とするこの領域内の円とすると, c_n は複素積分

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta_{n+1}} d\zeta$$

によって求められる.

(円環領域の中心が原点なので, 展開の中心を $a \in \mathbb{C}$ としたローラン展開の一般形より式が簡単になっている.)

- x の z 変換では $x[n]z^{-n}$ のようにローラン展開と冪の符号が逆に取られていたから, X_z の逆 z 変換を $\mathcal{Z}^{-1}[\cdot]$ と書くことにすると, C を原点を中心とする x の収束領域内の円に取ったとき, $x[n] = \left(\mathcal{Z}^{-1}[X_z]\right)[n]$ は次式によって与えられる.

$$x[n] = \left(\mathcal{Z}^{-1}[X_z]\right)[n] = \frac{1}{2\pi j}\int_C X_z(\zeta)\zeta^{n-1}d\zeta.$$

- 複素積分における円 C を収束領域の内部に取らなければならないことに注意. z 変換は $\mathcal{Z}[x]$ を加工した後で逆 z 変換して「時間領域」(工学的な解釈) の信号を復元できるから意味がある (実際に複素積分によって逆変換をおこなうことは稀ではあるが). 収束領域が空集合の場合には逆変換ができないから, 形式的に z 変換を定義しても役に立つとは言い難い.

- 理論的に逆 z 変換ができることが保証されていることは重要．この保証がないまま機械的に計算しても，計算結果は数学的に無意味な可能性がある．
- とはいえ，応用上は，複素積分によって z 変換された信号からもとの信号の値を復元することは稀．

- 多くの場合, 信号を z 変換した結果は z の有理式となり, その逆 z 変換は有理式に代数的な演算を施した結果と既知の関数の z 変換を対応させることで求められる (大抵は指数関数と時間シフトの組み合わせ (後述)).

片側 z 変換の例

- 信号 x が, $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ に対し, $x[n] = a^n, n \geq 0$ となっているものとする．これは $n \geq 0$ に対して指数関数である．信号は因果的, すなわち $n < 0$ に対し $x[n] = 0$ と仮定する．

- x を Z 変換すると，上述のように $D_x = \{z : |z| > |a|\}$ で，この領域で

$$\mathcal{Z}[x](z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a^n}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}}.$$

- 単位ステップ u ($n < 0$ で $u[n] = 0$, $n \geq 0$ で $u[n] = 1$ となる信号) は, 指数関数において $a = 1$ とした場合だから,

$$\mathcal{Z}[u](z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}}.$$

両側 z 変換の性質

- 以下では x, x_1, x_2 を信号とし, これらを z 変換したものを X_Z, X_{Z1}, X_{Z2}, これらの収束領域を D_x, D_{x_1}, D_{x_2} と書く.
- 以下では両側 z 変換の性質について述べるが, これらの性質はすべて片側 z 変換でも成り立つ. 注意を要するのは収束領域の部分のみである.

z 変換の線形性

- $D_{x_1} \cap D_{x_2} \neq \emptyset$ のとき, 任意の $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ に対し, $a_1 x_1 + x_2 x_2$ が定義され, $z \in D_{x_1} \cap D_{x_2} \neq \emptyset$ に対し

$$\mathcal{Z}[a_1 x_1 + a_2 x_2](z) = a_1 X_{Z1}(z) + a_2 X_{Z2}(z)$$

となる.

これは無限級数の性質を言い換えているだけなので証明するまでもない.

z 変換と時間シフトの関係

- D_x において $(\mathcal{Z}[\tau_m x])(z) = z^{-m} X_Z(z)$. ただし τ_m は時間軸 (工学的な解釈) におけるシフト演算子である. この結果を踏まえ, 時間軸に関して 1 シフトする演算子を z^{-1} と書くことが多い.

証明: $(\mathcal{Z}[\tau_m x])(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n-m]z^{-n}$ だが, $n-m=k$ と変数変換すると, $-n=-m-k$ で, D_x において $(\mathcal{Z}[\tau_m x])(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]z^{-m-k} = z^{-m}X_Z(z)$.

$\mathcal{Z}[\tau_m x]$ と $\mathcal{Z}[x]$ の収束領域が同一であること

x と $\tau_m x$ が同一の収束領域を持つことを示す．任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対し，$\limsup_{n\to\infty} |x[n]|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} |(\tau_m x)[n]|^{\frac{1}{n}}$ と $\limsup_{n\to\infty} |x[-n]|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} |(\tau_m x)[-n]|^{\frac{1}{n}}$ を示したい．$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を非負の実数列としたとき，任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対し, $\limsup_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty}(a_{n+m})^{\frac{1}{n}}$ となることが言えれば, 上記はここから導かれる．これを示す．ただし, 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の冒頭の有限項は $\limsup$ に影響を与えないので, 便宜上, $n+m<0$ のとき $a_{n+m}=0$ とおく．さて, $\limsup_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = R$ とすると, ある部分列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が取れて, $\lim_{k\to\infty}(a_{n_k})^{\frac{1}{n_k}} = R$ となる．このとき, $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} = (n_k - m)_{k\in\mathbb{N}}$ とすると, $\lim_{k\to\infty}(a_{p_k+m})^{\frac{1}{n_k}} = R$. $R<\infty$ のとき, $\lim_{k\to\infty}(a_{p_k+m})^{\frac{1}{p_k}} = \lim_{k\to\infty}\left((a_{p_k+m})^{\frac{1}{p_k+m}}\right)^{\frac{p_k+m}{p_k}} = R$. $R=\infty$ のとき $\lim_{k\to\infty}(a_{p_k+m})^{\frac{1}{p_k}} = R_1 < \infty$ と仮定すると $\lim_{k\to\infty}(a_{p_k+m})^{\frac{1}{p_k+m}} = \lim_{k\to\infty}\left((a_{p_k+m})^{\frac{1}{p_k}}\right)^{\frac{p_k}{p_k+m}} = R_1 < \infty$ となり矛盾．よって，いずれの場合も $\lim_{k\to\infty}(a_{n_k})^{\frac{1}{p_k}} = R$. よって $\limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_{n+m}$. $(a_{n+m})_{n\in\mathbb{N}}$ と $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の役割を入れ換えれば逆向きの不等式が成立することも示せるから, $\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_{n+m}$.

指数関数との積

- $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し, 信号 y を $y[n] = z_0^n x[n]$ によって定義すると, 収束領域 (後で求める) では $(\mathcal{Z}[y])(z) = X_Z(z/z_0)$.

証明: 収束領域では $\mathcal{Z}[y] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z_0^n x[n] z^{-n} = Z(z/z_0)$. x の収束領域を D_x とすると, y の収束領域は $D_y = |z_0| D_x$ であることが上極限を使った収束領域の計算法を適用することで確認できる.

畳み込み

- $D_{x_1} \cap D_{\cap x_2} \neq \emptyset$ と仮定する．このとき, $\mathcal{Z}[x_1 * x_2] = X_{Z1}X_{Z2}$.

証明: $D_{x_1} \cap D_{x_2}$ において X_{Z1} と X_{Z2} はともに正則関数だから, X_1X_2 は正則関数である．$(X_{Z1}X_{Z2})[z]$ はこの領域で絶対収束するから, 和の順番を入れ換えることができ, $(X_{Z1}X_{Z2})\,[z] = \sum x_1[m]x_2[n-m]z^n$ とできる．z^{-n} の係数が $(x_1 * x_2)[n]$ と一致することと, ローラン展開はこの領域で一意的であることから, $\mathcal{Z}[x_1 * x_2] = X_{Z1}X_{Z2}$.

X_Z の微分

- y を $y[n] = nx[n]$ によって定まる信号とすると, D_x において $(\mathcal{Z}[y])(z) = -z\dfrac{dX_Z(z)}{dz}$.

証明: D_x において X は正則だから微分可能で，この領域で項別微分できる． また，関数 $z \mapsto zdX_Z(z)/dz$ も D_x で正則である． よって，D_x において $-zdX_Z(z)/dz = -z\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-n)x[n]z^{-n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} nx[n]z^{-n}$. ローラン展開はこの領域で一意的だから, $(\mathcal{Z}[y])(z) = -z\dfrac{dX_Z(z)}{dz}$.

複素共役

- D_x において $(\mathcal{Z}[\overline{x}])(z) = \overline{X_Z(\overline{z})}$.

証明: 収束半径を計算する際には $x[n]$ の絶対値しか使わなかったから, $\overline{x}$ の z 変換の収束領域は x のそれと同一で D_x.
D_x において $(\mathcal{Z}[\overline{x}])(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{x}[n] z^{-n} = \overline{X_Z(\overline{z})}$.

時間反転

- y を $y[n] = \overline{x}[-n]$ によって定まる信号とする．また，$R_1 = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[n]|}$，$R_2 = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[-n]|}}$ とする．
  すると，y は $\{z : 1/R_2 < |z| < 1/R_1\}$ において z 変換可能で，$(\mathcal{Z}[y])\,(z) = \overline{X_Z(\overline{z}^{-1})}$.

証明: y の収束領域は

$$R_y = \left\{ z \in \mathbb{C} : \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|y[n]|} < |z| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|y[-n]|}} \right\}$$
$$= \left\{ z \in \mathbb{C} : \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[-n]|} < |z| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x[-n]|}} \right\}.$$

この領域では, $\left(\mathcal{Z}[y]\right)(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{x}[-n] z^{-n}$
$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{x}[-n] \left(z^{-1}\right)^n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{x}[m] \left(z^{-1}\right)^{-m}$
$(-n = m$ と変数変換$) = \overline{X}_Z(\overline{z}^{-1})$.

時刻 0 における信号の値

- x が因果的で $D_x \neq \{\infty\}$ のとき，
  $\lim_{z\to\infty} X_Z(z) = x[0]$.

証明: $D_x \neq \{\infty\}$ なら D_x はある原点を含む円の外部だから，$z \to \infty$ としてよい．z を固定すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $K > 0$ が取れ，$\left| X_Z(z) - \sum_{n=0}^{K-1} x[n]z^{-n} \right| \leq |\sum_{n=K}^{\infty} x[n]z^{-n}| < \epsilon$ とできるが，$K > 0 (\in \mathbb{N})$ を固定すると，$\sum_{n=K}^{\infty} |x[n]z^{-n}|$ は $|z|$ に対し単調減少するから，このまま $z \to \infty$ とすると $|\lim_{z\to 0} X_Z(z) - x[0]| < \varepsilon$. ε は任意だったから，$\lim_{z\to 0} X_Z(z) - x[0]$.

システムの伝達関数

- 入力信号を u, 出力信号を y とし, システムの入出力関係が信号 h との畳み込みによって与えられているものとする. $u, y, h \in l_1$ あるいはこれらは因果的と仮定する.
- 非因果的な信号の「入出力関係」という言葉は, 何らかの処理をおこなう前の信号を x, 処理後の信号を y と書いて区別するものである.

- 非リアルタイム信号処理では, 処理したい信号はコンピュータの記憶領域に保存されていることが前提である. このため, 例えば, 録音開始から 5 秒後の音声から雑音を除去するために録音開始から 4 秒以上 6 秒以下の範囲の音声を使うようなことをしても, 問題にならない. リアルタイム処理 (因果的な信号処理) では, このようなことはできない.

- システムが因果的であるか否かにかかわらず，入力信号と出力信号を z 変換したものの比によってシステムの伝達関数を定義する．z 変換が収束することは暗黙のうちに仮定される．
- $h * u$ の収束領域において，$y = h * u$ という入出力関係を持つシステムの伝達関数は，$H_Z(z) = \dfrac{Y_Z(z)}{U_Z(z)}$ によって与えられる．ただし，$H_Z(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] z^{-n}$．

- 今後, いちいち収束領域について記述することは省略する.
- システムの入出力関係がインパルス応答との畳み込みによって与えられているときには, その伝達関数を上記のようにして直ちに求めることができる.

- 次に，システムが因果的で，その入出力関係が時不変の入出力差分方程式

$$y[n]+\sum_{k=1}^{n_y}a_k y[n-k]=\sum_{l=0}^{n_u}b_l u[n-l]$$

で与えられているものとする． この入出力関係に対応する状態空間表現は線形時不変で(後述)，ゆえに y は行列の冪を使って表現できる．

- よって, u が z 変換可能なら, (領域を適切に取れば)y も z 変換可能である.
- $y[n-k] = (\tau_k y)[n]$ (τ_k は信号を時間軸に関し k ステップずらす作用素) なので, 先の入出力差分方程式は, 次のように書き直せる.

$$y + \sum_{k=1}^{n_y} a_k (\tau_k y) = \sum_{l=0}^{n_u} b_l (\tau_l u).$$

- 両辺を z 変換すると $Y_Z(z)+\sum_{k=1}^{n_y} a_k z^{-k} Y_Z(z) = \sum_{l=0}^{n_u} b_l z^{-l} U_Z(z)$ となるので，両辺の比をとり，その伝達関数を H_Z とすると，

$$H_Z(z) = \frac{\sum_{l=0}^{n_u} b_l z^{-l}}{1+\sum_{k=1}^{n_y} a_k z^{-k}}.$$

まとめると: 因果的な線形時不変入出力差分方程式

$$y[n] + \sum_{k=1}^{n_y} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{n_u} b_l u[n-l]$$

において, 機械的に, $y[n-k]$ を $z^{-k}Y_Z(z)$ で, $u[n-l]$ を $z^{-l}U_Z(z)$ で置き換えてから式を整理して $Y_Z(z)$ を $U_Z(z)$ で割ると伝達関数が導出できる.

始め：　$$y[n]+\sum_{k=1}^{n_y} a_k y[n-k]=\sum_{l=0}^{n_u} b_l u[n-l]$$

工程 1：　$$Y_Z(z)+\sum_{k=1}^{n_y} a_k z^{-k} Y_Z(z)=\sum_{l=0}^{n_u} b_l z^{-l} U_Z(z)$$

工程 2：　$$\left(1+\sum_{k=1}^{n_y} a_k z^{-k}\right) Y_Z(z)=\left(\sum_{l=0}^{n_u} b_l z^{-l}\right) U_Z(z)$$

結論：　$$H_Z(z)=\frac{\sum_{l=0}^{n_u} b_l z^{-l}}{1+\sum_{k=1}^{n_y} a_k z^{-k}}$$

入出力差分方程式の状態空間表現

次式で与えられる時不変の因果的な入出力差分方程式を考える.

$$y[n] + \sum_{k=1}^{n_y} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{n_u} b_l u[n-l]$$

ただし, $n < 0$ に対して $y[n] = 0$, $u[0] = 0$ とおく. また, 信号 u は複素平面におけるある円の外部で z 変換可能であると仮定する. この式によって定まる信号 y の z 変換が複素平面におけるある円の外部で収束することを示したい. このために, この入出力差分方程式の状態空間表現を求める.

制御工学でも同様の入出力差分方程式を取り扱うが, 制御工学では多くの場合 $n_y \geq n_u$ であることを仮定するのに対し, 信号処理ではこれは必ずしも前提とされない. そこで, 以下の議論は制御工学のそれとは若干異なったものになる.
状態変数を

$$\boldsymbol{x}[n] = (u[n-n_u], \ldots, u[n-1], y[n-n_y], \ldots, y[n-1])^T$$

のように取ると,

$$\boldsymbol{x}[n+1] = (u[n-n_u+1], \ldots, u[n], y[n-n_y+1], \ldots, y[n])^T$$

だから $\cdots$

$$
\begin{pmatrix} u[n-n_u+1] \\ \vdots \\ u[n] \\ y[n-n_y+1] \\ \vdots \\ y[n]) \end{pmatrix}
=
\left(\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c|c} 0 & \boldsymbol{I}_{n_u-1} \\ \hline 0 & 0 \end{array} & 0 \\ \hline
0 & \begin{array}{c|c} 0 & \boldsymbol{I}_{n_y-1} \end{array} \\ \hline
\begin{array}{ccc} b_{n_u} & \cdots & b_1 \end{array} & \begin{array}{ccc} -a_{n_y} & \cdots & -a_1 \end{array}
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} u[n-n_u] \\ \vdots \\ u[n-1] \\ y[n-n_y] \\ \vdots \\ y[n-1]) \end{pmatrix}
$$

$$
+\left(\boldsymbol{e}_{n_u} + b_0 \boldsymbol{e}_{n_u+n_y}\right) u[n]
$$

となる (ただし $\boldsymbol{e}_k$ は第 k 要素のみが 1 で他の要素が零のベクトル, $\boldsymbol{I}_k$ は k 次の単位行列, $\mathbf{0}$ は零ベクトルあるいは零行列). 上式右辺の行列を $\boldsymbol{A}$ とおき, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_{n_u} + b_0 \boldsymbol{e}_{n_u+n_y}$,
$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} b_{n_u} & \cdots & b_1 & -a_{n_y} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D} = b_0$ とおくと ⋯

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}[n+1] &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{B}u[n] \\ y[n] &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{D}u[n].\end{aligned}$$

ただし, u と y は因果的と仮定したので, $n < 0$ に対し $u[n] = y[n] = 0$ とする．上記の状態方程式の解が $n \geq 0$ に対し, $\boldsymbol{x}[n] = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^{n-k-1}\boldsymbol{B}u[k]$ となることを, この式を状態方程式に代入することで確認することができる．この解は, 第 1 項が指数関数, 第 2 項が指数関数と u との畳み込みだから, 信号 u が因果的で, その z 変換が複素平面における原点を中心とするある円の外部で収束するのであれば, 信号 $(\boldsymbol{x}[n])_{n\in\mathbb{N}}$ の z 変換も原点を中心とするある円の外部で収束する (ただし, $n < 0$ に対し $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とする). y は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ から有限項の定数倍および加算によって決まるから, y の z 変換も原点を中心とするある円の外部で収束する.

信号 y の z 変換と信号 $(\boldsymbol{x}[n])_{n\in\mathbb{N}}$ の z 変換および信号 u の z 変換の収束領域が一致することは保証されないが, これらの領域の積集合は空でない (原点を中心とするある円の外部になる) ので, この積集合において逆 z 変換が可能であり, よってこの不一致は問題にならない.
後で必要になるので, 上述の状態方程式の解の性質をもう少し詳しく調べておく. $\boldsymbol{x}_1[n] = (u[n-n_u], \ldots, u[n-1])^T$, $\boldsymbol{x}_2[n] = (y[n-n_y], \ldots, y[n-1])^T$ と状態変数を分け, $\boldsymbol{A}_{11} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{n_u-1} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$,

$\boldsymbol{A}_{21} = \left(\begin{array}{ccc} & \boldsymbol{0} & \\ \hline b_{n_u} & \cdots & b_1 \end{array}\right)$, $\boldsymbol{A}_{22} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \boldsymbol{I}_{n_y-1} & \\ \hline b_{n_u} & \cdots & b_1 \end{array}\right)$ とすると $\cdots$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1[n+1] &= \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1[n] + \boldsymbol{e}_{n_u}u[n], \\
\boldsymbol{x}_2[n+1] &= \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1[n] + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2[n] + b_0\boldsymbol{e}_{n_y}u[n],
\end{aligned}
$$

となる．$\boldsymbol{x}_1[n]$ は過去の入力の系列から自動的に決まる．$\boldsymbol{x}_2$ は, 過去の入力の系列と, 行列 $\boldsymbol{A}_{22}$ の冪および初期値から決まるが, 我々は初期値を零とおいているので, 過去の入力の系列と, 行列 $\boldsymbol{A}_{22}$ の冪で決まると考えてよい.

MA, AR, ARMA

因果的な入出力差分方程式

$$y[n] + \sum_{k=1}^{n_y} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{n_u} b_l u[n-l]$$

を考える．この入出力差分方程式が定めるシステムをいくつかに分類する．

- $a_k = 0 \ (1 \leq k \leq n_y)$ のとき, このシステムを**非再帰型システム**, **非巡回型システム**, **移動平均 (Moving Average; MA) システム**などと呼ぶ.

- これ以外のシステムを**再帰型システム**, **巡回型システム**, **ARMA(Auto-Regressive Moving Average システム**などと呼ぶ.

- $a_k = 0 \ (1 \leq k \leq n_y), \ b_l = 0 \ (1 \leq l \leq n_u)$

- $b_0 \neq 0$ で, $a_k = 0\ (1 \leq k \leq n_y)$, $b_l = 0\ (1 \leq l \leq n_u)$ のとき，これを **AR(Auto-Regressive システム**と呼ぶことがある.

- 教科書に AR が Auto Recursive の略であると書かれているが誤り. Auto-Regressive が正しい.

- 決定論的な信号処理の分野では AR/ARMA という言葉を伝達関数の分子が定数項のみか否かで使い分けるが, 確率的な信号処理の分野では ARX/ARMAX という言葉を雑音モデルの性質によって使い分けるので注意せよ (たとえば片山, システム同定, 朝倉書店, 2004.)

- インパルス応答が一定時間経過後に恒等的に零となる因果的なシステムを **Finite Impulse Response(FIR) システム**と呼ぶことがある.
- FIR システムでない因果的なシステムを **Infinite Impulse Response(IIR) システム**と呼ぶことがある.

- MA システムは FIR システムである．AR システムや ARMA システムは IIR システムのことも FIR システムのこともある．
- **システム**という用語のかわりに**モデル**, **過程**などの用語が用いられることもある．
- フィルタに関し, **FIR フィルタ**, **IIR フィルタ**という言葉も広く用いられる．

極と安定性

- 教科書の記述は混乱しているが, 結論は簡単なので簡潔に述べる.
- 因果的な線形時不変システムの伝達関数が $H_Z(z)$ で与えられ, これが z の有理式になっているものと仮定する. H_Z の分母多項式を D_Z, 分子多項式を N_Z とする. D_Z と N_Z は共通する零点を持たないものとする.

- $H_Z(x) = \dfrac{N_Z(z)}{D_z(z)}$ に対し (上述の仮定に注意)$\cdots$
  - ▷ $\{z \in \mathbb{C} : N_Z(z) = 0\}$ を $H_Z(z)$ の**零点**
  - ▷ $\{z \in \mathbb{C} : D_Z(z) = 0\}$ を $H_Z(z)$ の**極**
- システムが**BIBO(Bounded-input Bounded-output) 安定**であるとは, システムに有界な入力が印加されたときに出力も有界となることをいう.

- システムが因果的であるか否かにかかわらず, そのインパルス応答 h が l_1 に属する場合 $(l \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h[n]| < \infty)$ には, システムは BIBO 安定となる.

証明: システムへの入力 x が $\forall n \in \mathbb{Z}, |x[n]| \leq K|$ とする. このとき, システムのインパルス応答 h が l_1 に属するなら, 任意の時刻 n に対し, $|(h * x)[n] \leq K \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h[n]|$ だからシステムは BIBO 安定.

- システムが因果的であるとき, そのすべての極が複素平面の単位円の内部にあれば, システムはBIBO 安定 となる.

証明: 先に述べた状態方程式を使うと, 極が複素平面の単位円の内部にあるということは先に述べた行列 $= \boldsymbol{A}_2 2$ のすべての固有値が素平面の単位円の内部にあることを意味するので, $\boldsymbol{A}_{22}^n$ は $n \to +\infty$ としたとき指数関数の速さで零に収束する. よって, このシステムの出力は, 有害な信号と指数関数の速さで減衰する信号の畳み込みと, 有界な信号との線形結合で表されるから, 有界である.