ディジタル信号処理
第 5 回
離散フーリエ変換

離散フーリエ変換とは

- 離散時間フーリエ変換とは別物.
- 第 3 回の講義で述べた離散時間フーリエ級数と本質的に同じもの (教科書で名前を変えて改めて述べている理由は不明).
- 離散時間フーリエ級数という用語自体, それほど一般的でない.

離散時間フーリエ級数 (復習)

- 離散時間フーリエ級数は周期的な離散時間信号に対して定義される.
- x_E を周期 N の離散時間信号とする (以下では「周期」を「基本周期」の意味で使う). 添字 $\square_E$ を付けた理由は後述.
- $\Omega = 2\pi/N$ と定義する.

- x_E に対応する離散時間フーリエ係数は:

$$X[m] = \sum_{k=0}^{N-1} x_E[k] e^{-j\Omega mk} \quad (0 \le m < N).$$

- x_E は $(X[0], \ldots, X[n-1])$ から次のようにして求められる (x_E は周期 N の周期関数だから $0 \le n < N$ の範囲が計算できれば十分).

$$x_E[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{j\Omega mn} \quad (0 \le n < N).$$

- 教科書では, 以下の対になった式を離散時間フーリエ級数対と呼んでいた (教科書 p.29).

$$X[m] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j\Omega mk} \quad (0 \leq m < N)$$

$$x_E[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{j\Omega mn} \quad (0 \leq n < N)$$

- $x = (x_E[0], \ldots, x_E[N-1])$, $X = (X[0], \ldots, X[N-1])$ とおく．これらは有限長信号である．
- 離散時間フーリエ級数では, x_E に X を対応させた (前ページの式).
- X は, $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $X_E[n] = X[\mathrm{mod}(n, N)]$ と定義することにより, 自然に $n \in \mathbb{Z}$ で定義された関数 X_E に拡張される.

- $\mathrm{mod}(n, N)$ は n を N で割った余り. $n < 0$ のときには, $n + kN > 0$ となる $k \in \mathbb{Z}$ を取ってから, $n + kN$ を N で割った余りを計算する.
- 以上により, 離散時間フーリエ級数を信号 x_E と信号 X_E の対応と考えることもできるが…

- 第 3 回の講義でも述べた通り, 実際には長さ N の有限長信号 x と X の対応を取っているだけ. x_E も X_E も周期 N の周期関数だから, これらの $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, N-1\}$ における値は自動的に定まる.
- 離散時間フーリエ級数を長さ N の有限長信号 x と X の対応と解釈したものが離散フーリエ変換である.

終
了

- でもよいのだが …
- 離散時間フーリエ級数という概念自体がそれほど一般的でないことと, 信号処理で応用上最も重要なのが離散フーリエ変換であること, 離散フーリエ変換の計算の効率を上げる技法である高速フーリエ変換について解説する必要があることから, 説明を続ける.

- 離散時間フーリエ級数では, $e^{-j\Omega} = e^{-j2\pi/N}$ を W あるいは W_N(信号の長さ N を明示する目的で) と書くことが多い．教科書では, 5.5 節における高速フーリエ変換の解説でこの記法が使われるが, それ以前は $e^{-j2\pi/N}$ が使われている．講義では始めから W_N を用いる．これを回転因子と呼ぶことがある．

- 長さ N の離散時間信号 x の離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform, DFT) は, 次式により定義される.

$$X[m] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]W^{mk} \quad (0 \leq m < N).$$

数学的には $x[k]$ の添字 k は整数であり, これを「時間」と解釈するのは便宜的なものである. なお, 今後和を取る添字の文字を頻繁に書き換えるので, 不慣れな者は早く慣れること.

- 長さ N の信号 X の逆離散フーリエ変換 (Inverse Discrete Fourier Transform, IDFT) は, 次式により定義される.

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] W_N^{-mn} \quad (0 \leq n < N).$$

数学的には $X[m]$ の添字 k は整数である. 便宜上, これを「周波数」と解釈しておく.

- 信号を離散フーリエ変換する作用素を $\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}[\cdot]$ と書く．また, 信号を逆離散フーリエ変換する作用素を $\mathcal{F}_{\mathrm{IDFT}}[\cdot]$ あるいは $\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}^{-1}[\cdot]$ と書く．この記法を使うと, $0 \leq n < N$ に対し,

$$
(\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}[x])\,[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]W^{kn},
$$

$$
\left(\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}^{-1}[X]\right)[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}.
$$

- 実は, 離散フーリエ変換と, 逆離散フーリエ変換は, N 次の複素ベクトル空間において, W_N のべきから上式によって誘導される行列を使い, 線形変換を定義している.
- これらが定める行列はいずれも正則で, 互いに逆行列になっているので, 信号を離散フーリエ変換してから逆離散フーリエすると, 必ずもとに戻る.

$N=2$ の場合 $(W_2 = e^{-j\pi} = -1)$

$$\begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$N = 4$ の場合 $(W_2 = e^{-j\pi/2} = -i)$

$$
\begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{pmatrix}
$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & j & -1 & -j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -j & -1 & j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -j & -1 & j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & j & -1 & -j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- 離散フーリエ変換と逆離散フーリエ変換はともに, 信号を N 次元とベクトルと見做して, それに行列を掛ける操作.
- $\boldsymbol{x} = (x[0], \ldots, x[N-1])^T$, $\boldsymbol{X} = (X[0], \ldots, X[N-1])^T$ と列ベクトルの形で書き, 長さ N の信号に対する離散フーリエ変換に対応する行列を $\boldsymbol{F}_N$ と書く.

- 同様に, 長さ N の信号に対する逆離散フーリエ変換に対応する行列を, 仮に $\boldsymbol{G}_N$ と書く. 実は $\boldsymbol{G}_N = \boldsymbol{F}_N^{-1}$ になっていることが示せる.
- $\boldsymbol{F}_N$ の第 (p,q) 成分は, $W_N^{(p-1)(q-1)}$ で与えられる.
- $\boldsymbol{G}_N$ の第 (p,q) 成分は, $(1/N)W_N^{-(p-1)(q-1)}$ で与えられる.
- $\boldsymbol{G}_N = \boldsymbol{F}_N^{-1}$ であることを示す.

$$(\boldsymbol{G}_N\boldsymbol{F}_N)_{p,q} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} W_N^{-(p-1)(k-1)} W_N^{(k-1)(q-1)} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} W_N^{(k-1)(q-p)}.$$

$p = q$ なら $W_N^{(k-1)(q-p)}$ だから, $(\boldsymbol{G}_N\boldsymbol{F}_N)_{p,p} = 1$. 一方, $p \neq q$ のときは, 等比級数の公式を使うと,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} W_N^{(k-1)(q-p)} = \frac{1 - W_N^{N(q-p)}}{1 - W_N^{q-p}}.$$

$W_N = e^{-j2\pi/N}$ だったから, $p \neq q$ なら $W_N^{N(q-p)} = 1$, よって $(\boldsymbol{G}_N\boldsymbol{F}_N)_{p,q} = 0$. 以上によって $\boldsymbol{G}_N = \boldsymbol{F}_N^{-1}$ であることが示された.

- 以上のように, $\boldsymbol{G}_N = \boldsymbol{F}_N^{-1}$ だったから, 離散フーリエ変換と逆離散フーリエ変換は, 次のような操作をしているだけ.

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}_N \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}_N^{-1} \boldsymbol{X}$$

- 教科書では逆離散フーリエ変換を$\mathcal{F}_{\mathrm{IDFT}}[\cdot]$と表記しているが, 上述のように, 離散フーリエ変換および逆離散フーリエ変換は$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}_N \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}_N^{-1} \boldsymbol{X}$という操作をおこなっているに過ぎないので, 逆行列から誘導される逆写像という性質を強調する意味で, 講義では$\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}^{-1}[\cdot]$と書く.

- $X = (X[0], \ldots, X[N-1])$ は, もとの信号が実数であっても, 一般には複素数となる.
- $|z|$ によって複素数の絶対値, $\arg z$ によって複素数の偏角をあらわすことにする.
- X の各成分の絶対値を並べたものを信号 x の振幅スペクトルという.
- X の各成分の偏角を並べたものを信号 x の位相スペクトルという.

- 振幅スペクトル:
  $(|X[0]|, \ldots, |X[N-1]|)$
- 位相スペクトル:
  $(\arg X[0], \ldots, \arg X[N-1])$

偏角には 2π の不定性があるが, たとえば W. S. Levine, The Control Handbook, 2/e, CRC Press, 2011 では, 複素数 $z \neq 0$ に対し, $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ のとき $\arctan \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z}$, $\mathrm{Re}\, z < 0$ のとき $\pi + \arctan \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z}$ という値が用いられている (主値ではないことに注意). 逆正接関数の返却値をそのまま位相と定義する教科書もある.

- 振幅スペクトルや位相スペクトルを素直にグラフにするときには横軸は $\in 0, \ldots, N-1$ であるが，このようにすることは稀で，多くは正規化角周波数 $\omega_k = 2\pi k/N$ あるいは $f_k = F_s k/N$ を用いる．
- 振幅スペクトルのかわりにパワースペクトルを使うこともある．信号 x パワースペクトルは，X の各成分の絶対値の二乗を並べたものである．

- x が実数値の信号のとき, $m \in 1,\ldots,N-1$ に対し, $X[N-m]=\overline{X[m]}$ ($X[m]$ の複素共役) となる. これは $W_N = e^{-j2\pi/N}$ だから $W_N^{-k}=\overline{W_N^k}$ であることと, $x[n]$ が実数だから $\overline{x[n]}=x[n]$ であることを使えば, 以下のようにして示せる. $X[0]$ は除かれていることに注意. 教科書ではこれを実数信号における対称性と称している.

$$
\begin{aligned}
X[N-m] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W^{(N-m)n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W^{-mn} = \overline{X[m]}
\end{aligned}
$$

デシベルについて

デシベルという単位は，本来は，物理量の比 (比を取るので無次元量になる) に関連した単位で，たとえば V_1 を入力電圧，V_2 を出力電圧としたとき，$D = 10\log_{10}\dfrac{V_2}{V_1}$ とし，この入出力関係のゲインは **D デシベル**である，という言い方をする (単位記号は dB)．同じ状況で，入出力の電力の比を問題を問題にするときは，電力は電圧の 2 乗に比例するから，$D = 10\log_{10}\dfrac{V_2^2}{V_1^2} = 20\log_{10}\dfrac{V_2}{V_1}$ とする．すなわち，デシベルという単位を使うとき，10 を乗ずるか 20 を乗ずるかは，対象となる信号の物理的意味によって異なる

FFT アナライザでは, dBV, dBμ などといった単位が使われることがある. dBV は電圧 (V とする) の測定値を表示する際に用いられ, 1V を基準量として, $X = 20\log_{10} V$ [dBV] のように表示される. dBμ は $1\mu V$ を基準量とした表記法である. 音響系や振動系では, 適切な基準量を取った上で, 上記と同様の処理をおこなった量を「デシベル」と称する (典拠は小野測器の解説ページ).

https://www.onosokki.co.jp/HP-WK/c_support/newreport/decibel/db_2.htm

教科書 49 ページのコラムは誤り. 振幅スペクトルの単位は必ずしもデシベルではない.

離散フーリエ変換の由来は?

- 由来は離散時間フーリエ変換の離散化.
- 離散時間フーリエ変換により, (工学的な解釈では) 時間領域の無限長信号は, 周波数領域長さ 2π の区間で定義された連続な周期関数に変換される. ただし, 後者は独立変数が連続なので, コンピュータによる演算に向かない.

- 信号 x は無限長ではあるが, 零でない値を取り得る時刻は $0 \le n \le N-1$ に限定されると仮定する．これは, 時刻 0 で信号の記録を開始して時刻 $N-1$ で打ち切り, 残りの時刻における信号を零と見做したものである (信号の前後に零を充填するという意味でゼロ詰めという言葉を使うことがある).

- 信号 x の離散時間フーリエ変換の定義は $X_{\mathrm{DTFT}}(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]e^{-jk\omega}$ だったが, $x[k] = 0 (k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, N-1\})$ と仮定すると, $X_{\mathrm{DTFT}}(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]e^{-jk\omega}$. X_{DTFT} は連続的な変数 ω の関数で, このままの形ではコンピュータで使いにくいので, X_{DTFT} の定義域を $[0, 2\pi)$ とした上で, 定義域に 0 から始まる $2\pi/N$ 間隔の N 個の標本点を取り, X_{DTFT} を標本化すると, $0 \leq m \leq N-1$ に対し ⋯

$$X_{\mathrm{DTFT}}\left(m\frac{2\pi}{N}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]e^{-jkm\frac{2\pi}{N}}.$$

- $X[m]=X_{\mathrm{DTFT}}\left(m\frac{2\pi}{N}\right)$, $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ とすると離散フーリエ変換が得られる.

$$X[m]=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]W^{km}$$

- このようにして, 離散時間フーリエ変換をコンピュータにおける処理に適した形に変形できたのだが ⋯
- その代償として, もとの信号の特徴がある程度失われていることは要注意.
- 離散フーリエ変換は「時間領域」と「周波数領域」(これらは独立変数の工学的解釈) の N 個の標本点の間の全単射を与える.

- 上述の写像は正則行列によって定まる線形写像である.

- 標本点間の信号の情報は失われる. また, もともとの設定では $x[n]$ は $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, N-1\}$ で零だったが, 離散フーリエ変換が想定する信号は $(x[0], \ldots, x[N-1])$ は周期 N の周期信号に拡張され, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, N-1\}$ では話が変わってしまっている.

離散フーリエ変換の性質 (教科書 pp.50–51)

- 信号 x の長さが N で, $X = \mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}[x]$ とする. X も長さ N の有限長信号である.
- $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $x_E[n] = x[\mathrm{mod}(n, N)]$, $X_E[n] = X[\mathrm{mod}(n, N)]$ とすることにより, x と X を周期 N の周期関数に拡張しておく.

- 念のため改めて書いておくと:

$$x_E = (\cdots, \underbrace{x}_{長さ N}, \underbrace{x}_{長さ N}, \underbrace{x}_{長さ N}, \cdots),$$

$$X_E = (\cdots, \underbrace{X}_{長さ N}, \underbrace{X}_{長さ N}, \underbrace{X}_{長さ N}, \cdots)$$

- x_E と y_E を周期 N の周期的な離散時間信号としたとき, x_E と y_E の周期的畳み込み ($x_E \sharp y_E$ と書く) は, $n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$(x_E \sharp y_E)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_E[m] y_E[n-m]$$

で定義された (第 3 回との記号の違いに注意).

- $N = 4$ とし, いくつかの n に対してこの式を具体的に書いてみる.

$$(x_E \sharp y_E)[3] = x_E[0]y_E[3] + x_E[1]y_E[2] + x_E[2]y_E[1] + x_E[3]y_E[0]$$
$$(x_E \sharp y_E)[4] = x_E[0]y_E[4] + x_E[1]y_E[3] + x_E[2]y_E[2] + x_E[3]y_E[1]$$
$$(x_E \sharp y_E)[5] = x_E[0]y_E[5] + x_E[1]y_E[4] + x_E[2]y_E[3] + x_E[3]y_E[2]$$
$$(x_E \sharp y_E)[6] = x_E[0]y_E[6] + x_E[1]y_E[5] + x_E[2]y_E[4] + x_E[3]y_E[3]$$

- y_E の周期は N だから, $y_E[4] = y_E[0]$, $y_E[5] = y_E[1]$, $y_E[5] = y_E[2]$. これを代入して $\cdots$

$$(x_E \sharp y_E)[3] = x_E[0]y_E[3] + x_E[1]y_E[2] + x_E[2]y_E[1] + x_E[3]y_E[0]$$
$$(x_E \sharp y_E)[4] = x_E[0]y_E[0] + x_E[1]y_E[3] + x_E[2]y_E[2] + x_E[3]y_E[1]$$
$$(x_E \sharp y_E)[5] = x_E[0]y_E[1] + x_E[1]y_E[0] + x_E[2]y_E[3] + x_E[3]y_E[2]$$
$$(x_E \sharp y_E)[6] = x_E[0]y_E[2] + x_E[1]y_E[1] + x_E[2]y_E[0] + x_E[3]y_E[3]$$

- この式で使っている y_E の部分のみを抜き出して表を作ると $\cdots$

$y_E[3]$	$y_E[2]$	$y_E[1]$	$y_E[0]$
$y_E[0]$	$y_E[3]$	$y_E[2]$	$y_E[1]$
$y_E[1]$	$y_E[0]$	$y_E[3]$	$y_E[2]$
$y_E[2]$	$y_E[1]$	$y_E[0]$	$y_E[3]$

- 1行下がるごとに右端の数が右から出て行って左から左端に入るという構造になっている．このような構造を循環シフトという．上記と逆方向のシフト(左から出て右に入る)もある．

- 長さ N の信号 x と y の「畳み込み」(に相当する演算) を, 離散時間フーリエ級数で用いた x_E と y_E の周期的畳み込みによって定義する. これを信号 x と y の循環畳み込みあるいは巡回畳み込みと呼び, $x \circledN y$ と書く ($x \circledast y$ と書くこともある).
- 和を取る添字の解釈が時間のときも, 周波数のときも, 同じ式で循環畳み込みを定義する.

- 定義を改めて書くと:

$$(x \textcircled{\scriptsize N} y)[n] = (x_E \sharp y_E)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_E[m] y_E[n-m]$$

- $0 \le n \le N-1$ とし, y_E の周期性を使うと次のようになる. mod を取ったために循環シフトが発生していることに注意.

$$(x \textcircled{\scriptsize N} y)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_E[m] y_E[\mathrm{mod}(n-m, N)]$$

- $0 \leq n \leq N-1$ では $x_E[n] = x[n]$, $y_E[n] = y[n]$ だから ⋯

$$(x \textcircled{\scriptsize N} y)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[\mathrm{mod}(n-m, N)]$$

- 以上で見たように, 循環畳み込みは, 長さ N の有限長信号を周期 N の信号に拡張してから周期的畳み込みをおこなうものであり, その計算の過程で循環シフトが発生した.

- 第 3 回と同様に, 信号を時間あるいは周波数の添字に関して m ずらす演算子を τ_m と書く.

- 無限長信号では, $(\tau_m x)[n] = x[n-m]$ とすれば良かったが, 有限長信号では $n - m \notin 0, \ldots, N-1$ の場合には $x[n-m]$ は定義されていないので, 何らかの方法でこれを決める必要がある.

- 循環シフトを用いるのが簡単で, この場合, 以下のようになる.

$$(\tau_m x)[n] = x[\mathrm{mod}(n-m, N)].$$

- 教科書 表5.1 の循環シフトの定義は曖昧. 長さ N の信号 x を循環シフトした結果は長さ N の信号でなければならないが, この表からは無限長信号のように読める. また, 信号 u_N を導入する必要はない.

- 循環シフトとは, 剰余演算子 mod を使って添字の範囲を 0 から $N-1$ の範囲に戻すだけのものなので, そのように理解してほしい.

- 以上の循環シフトに関する注意と，$X[N-k] = X[\mod(-k,N)]$ となることに注意すれば，教科書 50 ページ 表 5.1 は教科書 30 ページ 表 3.2 とまったく同じ．講義の記法は教科書と異なるので，改めて書くが $\cdots$
- 信号 x を長さ N の信号とし，$X = \mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}[x]$ とする．同様に，$X_1 = \mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}[x_1]$, $X_2 = \mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}[x_2]$ とする．

- 離散フーリエ変換, 逆離散フーリエ変換は, 信号を有限次元ベクトルと見做してそれに正則行列を掛ける操作なので, $X = \mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}[x]$ であれば $x = \mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}^{-1}[X]$ となることは自明．よって, 表の左側を離散フーリエ変換すると右側になる, あるいは表の右側を離散フーリエ変換すると左側になる, という部分のいずれか (楽な方) を書けばよい.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}[ax_1 + bx_2] &= a\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}[x_1] + b\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}[b] \\
\left(\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}[\tau_m x]\right)[n] &= W^{nm} X[n] \\
\left(\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}^{-1}[\tau_m X]\right)[n] &= W^{-nm} x[n] \\
\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}[x_1 \circledN x_2] &= X_1 X_2 \\
\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}^{-1}[X_1 \circledN X_2] &= x_1 x_2 \\
\left(\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}[\bar{x}]\right)[n] &= \bar{X}[\mathrm{mod}(-n, N)]
\end{aligned}
$$

- 教科書 表 5.1 6-7 行目右側の k は n の誤り
- 実数信号に対する対称性についてはすでに確認した.

- 行列の記法に戻ると, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}_N \boldsymbol{x}$ より, $\|\boldsymbol{X}\|^2 = \boldsymbol{X}^* \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{F}_N^* \boldsymbol{F}_N \boldsymbol{x}$. ただし $\square^*$ は行列やベクトルの Hermite 転置 (転置してから各成分の複素共役を取る). $\boldsymbol{F}_N$ と $\boldsymbol{G}_N$ の定義を思い出すと, これらはともに対称行列で, $\boldsymbol{G}_N = (1/N)\boldsymbol{F}_N^*$ となっている. $\boldsymbol{G}_N = \boldsymbol{F}_N^{-1}$ であることとは既に見たから, $\boldsymbol{F}_N^* = N\boldsymbol{G}_N = N\boldsymbol{F}_N^{-1}$. よって $\|\boldsymbol{X}\|^2 = N\|\boldsymbol{x}\|^2$. 教科書ではこれをパーセバルの公式と呼んでいる.

畳み込みの計算の効率化 (教科書 pp. 52–53)

- 第 2 回に学んだ信号 x_1 と信号 x_2 の畳み込み:

$$(x_1 * x_2)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m]$$

を, 循環畳み込みと区別するために, 直線畳み込みあるいは線形畳み込みと呼ぶことがある.

- 畳み込みの計算には一般には無限項の和を取る必要があるのだが ⋯

- 信号 x_1, x_2 は時刻 0 から始まる有限長信号で, それぞれの長さを N_1, N_2 とする:
  $x_1 = (x_1[0], \ldots, x_1[N_1 - 1]),$
  $x_2 = (x_2[0], \ldots, x_2[N_2 - 1]).$
- 信号 x_1 を, 以下のような無限長信号 x_{1Z} と同一視する.

$$x_{1Z}[n] = \begin{cases} x_1[n], & 0 \leq n \leq N_1 - 1, \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

- 信号 x_2 も同様に，以下のような無限長信号 x_{2Z} と同一視する．

$$x_{2Z}[n] = \begin{cases} x_2[n], & 0 \le n \le N_2 - 1, \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

- 教科書等で明示的に述べられることは稀であるが，**有限長信号 x_1 と x_2 の畳み込みは，上述の x_{1Z} と x_{2Z} の畳み込みによって定義される**

添字が信号の長さの部分を走り抜けてしまったら，そこは零なんだよ!わかれよ!
というニュアンスの習慣的な記法と思われる．

- この講義では, 有限長信号の (直線) 畳み込みをおこなう際には, 上記のような拡張処理がなされているものと仮定する.
- $(x_1 * x_2)[n] = (x_{1Z} * x_{2Z})[n]$ $= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{1Z}[m]x_{2Z}[n-m]$ であるが, 信号の値が零の部分は和に影響しないから, $(x_1 * x_2)[n] = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_{1Z}[m]x_{2Z}[n-m]$ である.

- $n < 0$ あるいは $n \geq N_1 + N_2 - 1$ のとき, 上記の各項の $x_{2Z}[n-m]$ はすべて零となるから, $(x_1 * x_2)[n] = 0$ となる.
- よって, $(x_1 * x_2)[n]$ は $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, N_1 + N_2 - 2\}$ では恒等的に零; 非零となり得る部分 $((x_1 * x_2)[0], \ldots, (x_1 * x_2)[N_1 + N_2 - 2])$ を切り出すと, 長さ $N_1 + N_2 - 1$ の有限長信号が得られる.

- 一般に, 畳み込み演算より離散フーリエ変換と乗算の方が高速なので, 信号を加工して直線畳み込みと循環畳み込みが一致するようにできれば, 積演算と逆離散フーリエ変換によって直線畳み込みを高速に計算できることが期待される.

- 天下り的であるが, x_1 と x_2 の右端に恒等的に零となる有限長の信号を追加して長さが $N_1 + N_2 - 1$ としたものを x_{1C} と x_{2C} とし, $N = N_1 + N_2 - 1$ とおく (この処理もゼロ詰めと呼ぶ).
- $0 \leq N \leq N_1 + N_2 - 2$ に対し, $(x_1 * x_2)[n]$ と $x_{1C} \circledN x_{2C}$ が一致することを示したい.

- 現在取り扱っている畳み込みでは非零の項は有限なので，畳み込みは可換である．そこで，必要なら x_{1C} と x_{2C} の順番を入れ換えることにより，一般性を失うことなく，$N_1 \geq N_2$ と仮定する．
- $0 \leq n < N_1 + N_2 - 1$ に対し，$(x_{1C}Ⓝx_{2C})[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_{1C}[m]x_{2C}[\mathrm{mod}(n-m, N)]$ だが，x_{1C} の構成法から，$(x_{1C}Ⓝx_{2C})[n] = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1[m]x_{2C}[\mathrm{mod}(n-m, N)]$．この和を $n-m \geq 0$ と $n-m \leq 0$ の部分に分ける．
- $n-m \geq 0$ のときは，$\mathrm{mod}(n-m, N) = n-m$ で，$0 \leq n-m \leq N_1+N_2-1$．$0 \leq n-m \leq N_2-1$ のとき $x_{2C}[n-m] = x_2[n-m] = x_{2Z}[n-m]$．
- $n-m < 0$ のときは，$-N_1+1 \leq n-m < 0$ より，$N_2 \leq \mathrm{mod}(n-m, N) = (N_1+N_2-1)+(n-m) < N_1+N_2-1$，よって $x_{2C}[\mathrm{mod}(n-m, N)] = 0 = x_{2Z}[n-m]$．

- 以上により, $0 \le n < N_1 + N_2 - 1$ に対し, $(x_{1C} Ⓝ x_{2C})[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_{2Z}[n-m]$ であるが, $x_{1Z}[m]$ は $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, N_1 - 1\}$ だったから, さらに $(x_{1C} Ⓝ x_{2C})[n] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_{1Z}[m] x_{2Z}[n-m]$ と書き直すことができる.

- よって, $0 \le n \le N_1 + N_2 - 2$ に対して次式が成り立つ.

$$(x_{1C} Ⓝ x_{2C})[n] = (x_1 * x_2)[n].$$

- 循環畳み込みは離散フーリエ変換によって積に変換されるから, まず x_1 と x_2 を零詰めによって長さ $N_1 + N_2 - 1$ の信号に延長し, これらを離散フーリエ変換してから積を取り, その結果を逆離散フーリエ変換することにより, x_1 と x_2 の畳み込みが計算できる.
- 応用上この方法が有用なのは, 離散フーリエ変換がコンピュータで高速に計算できるから.

- 時間の都合で, 窓関数は次回以降にまわす.
- 重畳加算法と高速フーリエ変換については, 時間に余裕がある回があれば述べる.