ディジタル信号処理

第 4 回

標本化定理

フーリエ変換

- フーリエ変換は電気数学 III で既習である筈なので, この講義では簡単な復習に留める.
- フーリエ変換にも色々な流儀があるが, この講義ではまず教科書の形を紹介する.

今回の議論では, 不等号 $\leq$ と $<$ の相異は重要でないことが時折ある (積分すると消えるため). 教科書と等号の有無に相異があることがあるが, 適宜読み換えてほしい.

- g を, 時間 (t と書く) を独立変数として持つ, **性質の良い関数**とする. どのような意味で「性質が良い」かについては深入りしないが, 以下で断片的に若干の注意を述べる.
- g のフーリエ変換とは, 次式によって定義される関数である.

$$\mathcal{F}[g](\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\Omega t}dt$$

- G を, 角周波数 (Ω と書く) を独立変数として持つ性質の良い関数とする.
- G の逆フーリエ変換とは, 次式によって定義される関数である.

$$\mathcal{F}^{-1}[G](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

- 性質の良い関数をフーリエ変換してから逆フーリエ変換すると, もとの関数に戻ることが証明できる.

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[g]] = g.$$

この等式は関数 g に色々な条件を付けないと成立しないことに注意.

- フーリエ変換には色々な定義の仕方がある. 主要なものを見てゆく.

歴史的理由により, 確率論の分野では, フーリエ変換と逆フーリエ変換における $e^{-j\Omega t}$ と $e^{j\Omega t}$ の役割が上記と反転している:

$$\mathcal{F}[g](\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{j\Omega t} dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}[G](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega) e^{-j\Omega t} d\Omega$$

フーリエ変換と逆フーリエ変換が対称的な形となるように, 次のように定義する流儀もある.

$$\mathcal{F}[g](\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}[G](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

フーリエ変換後の変数を各周波数 Ω から周波数 $\nu = 2\pi\Omega$ に変えると, $d\nu = 2\pi d\Omega$ より, フーリエ変換と逆変換の式は次のように書き換えられる.

$$\mathcal{F}[g](\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi\nu t}dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}[G](t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega)e^{j2\pi\nu t}d\nu$$

- 以上, 何通りかフーリエ変換と逆フーリエ変換の種類を述べたが …
- 他にもバリエーションがあり, 色々な教科書を見ると記述が全部違う, ということもあり得る.
- どれかが正しくてどれかが間違っているというわけではなく, 定義の仕方に色々な流儀があるというだけの話なので, 混乱や誤解をしないよう注意.

どのような関数がフーリエ変換できるか?

- 「関数をフーリエ変換してから逆フーリエ変換するともとに戻る」ためには条件が必要．前回の講義でも述べたが, 微分積分学の範囲の結果を紹介する (証明は手間がかかるので略す).
- 関数 g の絶対値を積分したものが有限のとき, g は絶対可積分であるという．

- g が連続かつ絶対可積分なら $\mathcal{F}[g]$ は計算可能である．さらに $\mathcal{F}[g]$ も連続かつ絶対可積分なら，$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[g]] = g$ となることが証明できる．
- g および $\mathcal{F}[g]$ がともに連続かつ絶対可積分」という条件が，「関数をフーリエ変換してから逆フーリエ変換するともとに戻る」ための最も簡単な十分条件である．

フーリエ変換できる関数のクラスを広げる

- $\mathcal{A}$ を, 実軸で定義された**区分的に連続**かつ**絶対可積分**な関数全体が作る集合とする (用語の意味は後述). $\mathcal{A}$ に属する関数 g に対し, $\mathcal{F}[g]$ が定義できる. $\mathcal{T} = \mathcal{F}_I[\mathcal{A}]$ とおく.

    ▷ **区分的に連続**の定義にはバリエーションがあるが, この講義では, g が高々有限個の不連続点を持ち, 不連続点において関数の右極限と左極限が共に定まりかつ有限となることをいう.

- 微分積分学の範囲でも, フーリエ変換が適用できる関数のクラスを, $\mathcal{A}$ と $\mathcal{T}$ の要素の和で表現できる関数全体の集合に拡大することができる (詳細は Howell(2017).
- 更に一般的な関数にフーリエ変換を適用したい場合には超関数論が必要になる．この講義では超関数論には触れない.

デルタ関数の取り扱いについて

- 教科書ではデルタ関数 (超関数の一種) を議論の中心部分に据えているが (4.2 節), 講義では, デルタ関数に関する議論を最低限に留めるため, 説明のスタイルを教科書と変え, 4.2 節 (デルタ関数を使った離散時間信号の表現) は当面飛ばす.
- 以下の記述で直接参考にしているのは, 以前の講義で挙げた樋口, 橋本 (2000) および
府川, ディジタル信号処理, 培風館, 2009
荻原, ディジタル信号処理, 第 2 版, 森北出版, 2014.

スペクトル

- スペクトル (あるいはスペクトグラム) という言葉が, 信号処理の分野で, 明確に定義されることなく漫然と使われることがある.
- たとえば, 森下, 小畑, 信号処理, コロナ社, 1994 では, 時間領域の信号をフーリエ級数展開したときの係数や, 信号をフーリエ変換した関数のことを, 「スペクトル」と呼んでいる.
- 「スペクトル」と「スペクトグラム」はおおむね同じ意味で使われる. 「フーリエスペクトル」という言葉が使われることもある.

- 信号のフーリエ係数あるいはそれをフーリエ変換した関数の振幅や位相に対して,「振幅スペクトル」「位相スペクトル」という言葉が使われることがある.
- 不規則雑音の解析にフーリエ解析を適用する手法を「スペクトル解析」と呼ぶことがある (教科書では 9 章).
- 漠然と使われることが多い言葉なので, 教科書等を呼んでいて定義が見付けられなかったら,「フーリエ解析に関係した何か」だと思っておくとよい.
- 数学用語の「スペクトル」はまったく意味が異なり, 行列の固有値を無限次元空間の線形写像に拡張したものをいう (岩波数学入門事典).

フーリエ変換と離散時間フーリエ変換

- 連続時間の信号 x が標本化周期 T_s で標本化されているものとし, $x[n] = x(nT_s)$ とする. $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}} \in l_1$ と仮定する.
- $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ の離散時間フーリエ変換はまず $[0, 2\pi)$ で定義され, 続いて $(-\infty, \infty)$ で定義された周期関数に拡張される. 今回の講義では定義域を $(-\pi, \pi]$ に変更する.

- 以下の対になった式を, 離散時間フーリエ変換対という (復習). 区間の変更に注意. フーリエ変換と区別するため, $X_{\mathrm{DTFT}}(\omega)$ という記号を使っている.

$$X_{\mathrm{DTFT}}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]e^{-jn\omega}, \qquad \omega \in (-\pi, \pi],$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{\mathrm{DTFT}}(\omega)e^{jn\omega}d\omega, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- 連続時間信号 x はフーリエ変換可能である (フーリエ変換してから逆フーリエ変換するともとに戻る関数) と仮定し, x をフーリエ変換したものを X_{FT} と書く. X_{FT} と X_{DTFT} の関係を知りたい.
- 逆フーリエ変換の公式から, $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_{\mathrm{FT}}(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$ である.

- $t = nT_s$ では $x[n]$ は次のようになる.

$$x[n] = x(nT_s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_{\mathrm{FT}}(\Omega)e^{j\Omega nT_s}d\Omega$$

- 積分の区間を $\left(\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{T_s}, \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{T_s}\right]$ に分割すると $(m \in \mathbb{Z})$,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_{\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{T_s}}^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{T_s}} X_{\mathrm{FT}}(\Omega)e^{j\Omega nT_s}d\Omega$$

- 各区間で $\Omega' = \Omega - m\frac{2\pi}{T_s}$ という変数変換をすると, $e^{j\Omega n T_s} = e^{j(\Omega' + m\frac{2\pi}{T_s})nT_s} = e^{j\Omega' n T_s}$ より,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_{-\frac{\pi}{T_s}}^{\frac{\pi}{T_s}} X_{\mathrm{FT}}(\Omega' + m\frac{2\pi}{T_s})e^{j\Omega' n T_s}d\Omega'.$$

記号が Ω' のままだと見にくいので, Ω に書き換えておく.

- 逆フーリエ変換を使って X_{FT} から $x[n]$ を求める式は最終的に以下のようになる．X_{FT} を横方向に $\dfrac{2\pi}{T_s}$ の整数倍ずらしたもの全体が足し合わされていることに注意.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{-\frac{\pi}{T_s}}^{\frac{\pi}{T_s}} X_{\mathrm{FT}} \left(\Omega + m\frac{2\pi}{T_s} \right) e^{j\Omega n T_s} d\Omega.$$

- 離散時間フーリエ変換との対応を取るため, $\omega = \Omega T_s$ という変数変換をおこない (縮尺の変更), 積分の範囲を $(-\pi, \pi]$ に変えると, 次のようになる．縮尺が変わった結果, 変数 Ω に関する $2\pi/T_s$ の整数倍のずれは, 変数 ω に関する 2π の整数倍のずれに変わることに注意.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi T_s} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_{\mathrm{FT}} \left(\frac{\omega}{T_s} + m \frac{2\pi}{T_s} \right) e^{j\omega n} d\omega.$$

- $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}(\in l_1)$ の離散時間フーリエ変換は一意的だから, 先の積分記号の内部は, T_s に関する倍率の部分を除き, $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ の離散時間フーリエ変換と一致する. すなわち, 次の等式が成り立つ.

$$X_{\mathrm{DTFT}}(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_{\mathrm{FT}}\left(\frac{\omega}{T_s} + m\frac{2\pi}{T_s}\right).$$

- 先の式 (教科書では (4.14) 式) からわかるように, $X_{\mathrm{DTFT}}(\omega)$ は, $X_{\mathrm{FT}}(\omega/T_s)$ を 2π の整数倍ずらしたもの全体を足し合わせ, 全体を $1/T_s$ で割ったものになる.

- 教科書には「$X(\Omega)$ を周波数軸上で周期的に配置」と書かれているが, (4.14) 式が正しく, 説明文は誤り.

帯域制限信号

- コンピュータ等で信号を処理する際に連続時間信号をそのまま記録することは困難であり，ふつうはそれを標本化した信号が記録される．
- 先と同様に，連続時間の信号 x が標本化周期 T_s で標本化されているものとし，$x[n] = x(nT_s)$ とする．$(x[n])_{n\in\mathbb{Z}} \in l_1$ と仮定する．

- x はフーリエ変換可能であると仮定し, それをフーリエ変換したものを X_{FT} と書く. また, $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ を離散時間フーリエ変換したものを X_{DTFT} と書く.
- 応用上 X_{FT} が必要となることはあるが, これを厳密に求めるためには連続時間信号 x の全時刻における値を積分する必要があり, 実現は困難.

- 一方, X_{DTFT} は無限級数によって決まるので, 無限級数を有限項で打ち切れば, 一定の精度で近似可能.
- そこで, X_{DTFT} から X_{FT} を求めることの可否を考える.

- 信号は電波や音波などによって伝えられるが，信号として価値を持つのは，多くの場合，その波に含まれる周波数の絶対値が一定以下の成分である．そこで，周波数の絶対値が一定以下の成分のみを含む信号を考える．

- $\Omega_B = \sup\{|\Omega| : X_{\mathrm{FT}}(\Omega) \neq 0\}$ とする.
- Ω_B が有限の値を取るとき, 信号 x を帯域制限信号という.
- $F_B = \Omega_B/2\pi$ とおく (Ω_B のスケールは角周波数であり, これを周波数のスケールに変更すると F_B になる.

教科書の Ω_B の定義はナイキストレートを定義するとき破綻するので変更した.

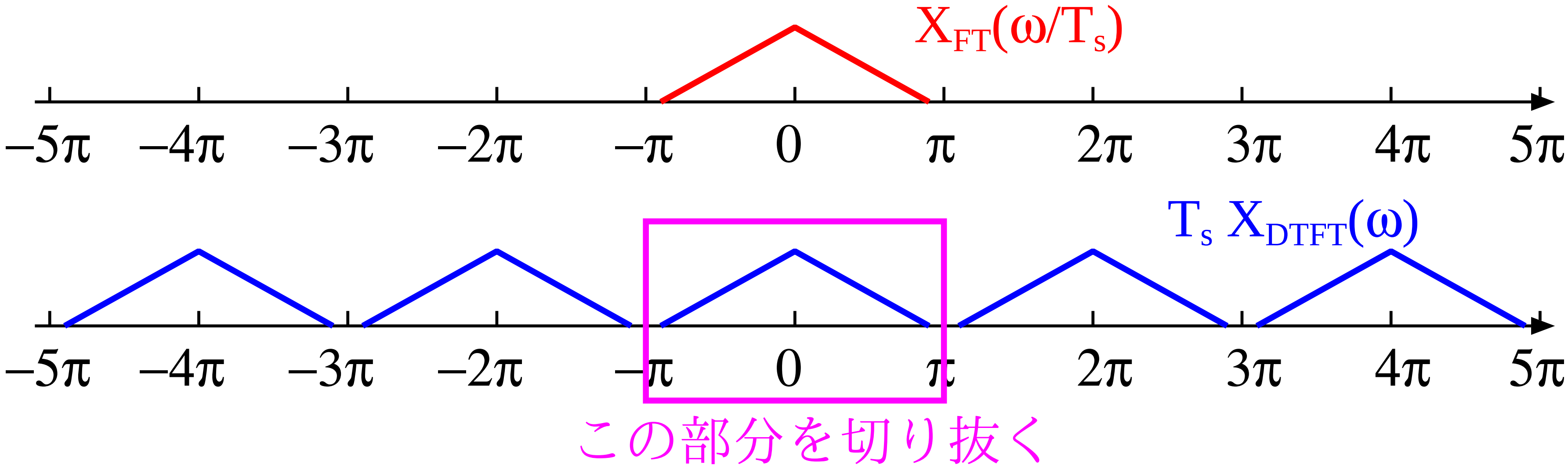
- x が帯域制限信号, $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ をそれを標本化周期 T_s で標本化した信号とする. x はフーリエ変換可能, $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}} \in l_1$ と仮定する. $F_s = 1/T_s$ を標本化周波数, $\Omega_s = 2\pi F_s$ を標本化角周波数とする. $2F_B < F_s$ と仮定する.
- このとき, X_{FT} を $\Omega_s = 2\pi/T_s$ の整数倍横にずらしたものをすべて足し合わせても, $(-\Omega_s/2, \Omega_s/2]$ の範囲で波形が変わることはないから $\cdots$

- $X'_{\mathrm{FT}}(w) = X_{\mathrm{FT}}(\omega/T_s)$ とする (横軸のスケールの変換).
- X'_{FT} を 2π の整数倍横にずらしたものをすべて足し合わせても, $(-\pi, \pi]$ の範囲では波形が変わることはない.
- $2F_B$ をナイキストレートあるいはナイキスト周波数と呼ぶ.

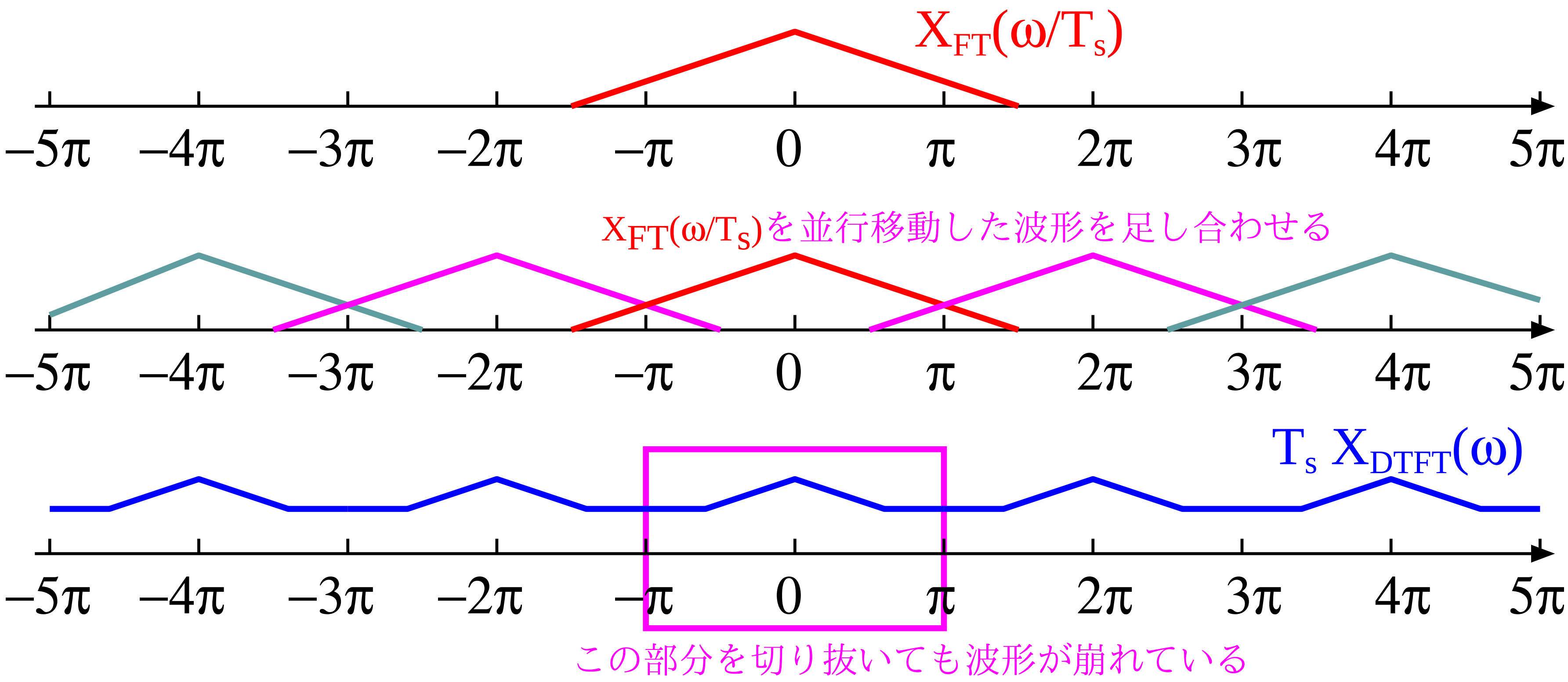
- $2F_B < F_s$ であれば, X_{DTFT} から横軸の $(-\pi, \pi)$ の部分を抽出し, 残りの部分をすべて零としてから縮尺を変更することで, X_{FT} を復元できる.
- 一方, $2F_B \geq F_s$ のときには, X_{FT} を左右にずらしたものの重複部分が加算され, 波形が崩れるため, X_{DTFT} から X_{FT} を復元することはできない (次ページ図参照).

$F_s > 2F_B$ のとき:切り抜けばもとの波形

(T_s に注意, 縦方向の縮尺の調整は必要)



$F_s \leq 2F_B$ のとき:切り抜いた波形が崩れる

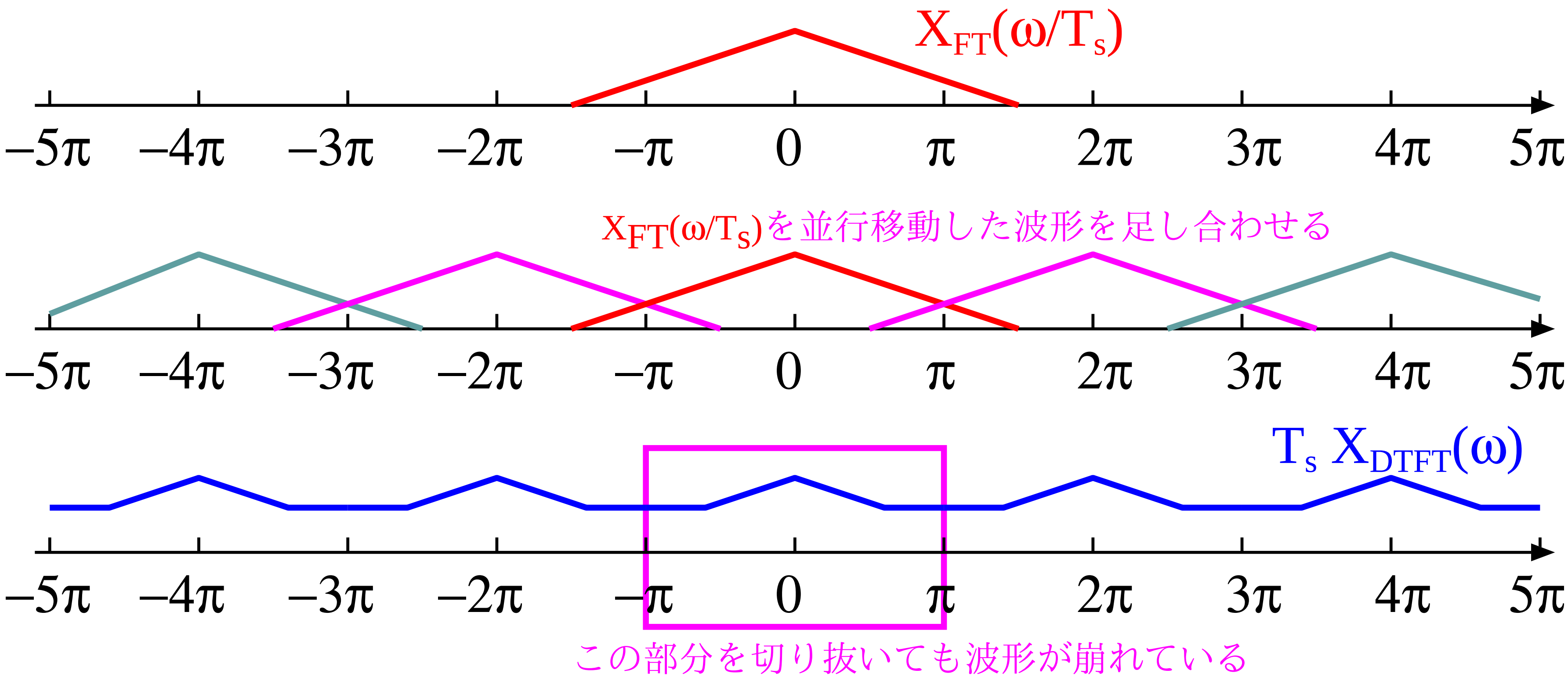


エイリアシング

- 先に見たように, 信号 x の標本化をおこなう際, 標本化周波数がナイキストレートより低いと, X_{DTFT} から X_{FT} を復元するはできない.
- この原因は, X_{FT} を左右に $2\pi/T_s$ の整数倍ずらしたものと X_{FT} に重なる部分があり, 加算によって波形が崩れること.

- $F_s \leq 2F_B$ のとき, X_{FT} の角周波数の絶対値が πF_s 以上の成分は, 角周波数 πF_s のところで折り返されて, 低い角周波の成分として X_{DTFT} に加算される. この現象をエイリアシングという.
- これのよって発生する歪みを折り返し歪みと呼ぶことがある.
- 確認のため, 先の図を再掲する.

エイリアシング



$X_{FT}(\omega/T_s)$
−5π −4π −3π −2π −π 0 π 2π 3π 4π 5π
$X_{FT}(\omega/T_S)$を並行移動した波形を足し合わせる
−5π −4π −3π −2π −π 0 π 2π 3π 4π 5π
$T_s\ X_{DTFT}(\omega)$
−5π −4π −3π −2π −π 0 π 2π 3π 4π 5π
この部分を切り抜いても波形が崩れている

教科書の言葉使いを尊重すると …

- $X'_{\mathrm{FS}}(\omega) = X_{FS}(\omega/T)$ により X'_{FS} を定義する.
- 標本化周波数がナイキストレート以下の場合に, $\underbrace{\text{隣接する周波数スペクトル}}_{X'_{\mathrm{FS}}\text{を左右に }2\pi\text{の整数倍並行移動した関数}}$ の $w \in (-\pi, \pi)$ における値が $\underbrace{???}_{X_{\mathrm{DFTS}}\text{に}}$ 入り込む現象をエイリアシングという.

- 直感的に言うと，エイリアシングとは，回転するプロペラを一定の時間間隔でフラッシュ光を当てながら観察したとき，発光の時間間隔が長すぎるとプロペラが逆回転しているように見える現象のことをいう．

標本化定理

- 帯域制限された連続時間信号 x がフーリエ変換可能と仮定し, それをフーリエ変換したものを X_{FT} とする.

- x を標本化周期 T_s で標本化した信号 $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ は l_1 に属するものとする． $F_s = 1/T_s$, $\Omega_s = 2\pi F_s$ とおく． $F_s > 2F_B$ と仮定する． $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ を離散時間フーリエ変換したものを X_{DTFT} と書く．

- $F_s > 2F_B$ だから, 区間 $(-\pi, \pi]$ では $X_{\mathrm{DTFT}}(\omega) = \dfrac{1}{T_s} X_{\mathrm{FT}}(\omega/T_s)$. 変数を $\Omega = \omega/T_s$ に戻すと, 区間 $(-\Omega_s/2, \Omega_s/2]$ において $X_{\mathrm{FT}}(\Omega) = T_s X_{\mathrm{DTFT}}(\Omega T_s)$. 区間 $(-\Omega_s/2, \Omega_s/2]$ の外部では $X(\Omega) = 0$. まとめると以下の通り.

$$X_{\mathrm{FT}}(\Omega) = \begin{cases} T_s X_{\mathrm{DTFT}}(\Omega T_s), & \Omega \in (-\frac{\Omega_s}{2}, \frac{\Omega_s}{2}] \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

- $X_{\mathrm{DTFT}}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]e^{-jn\omega}$ を代入すると ($\Omega = \omega/T_s$ に注意)

$$X_{\mathrm{FT}}(\Omega) = \begin{cases} T_s \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]e^{-jn\Omega T_s}, & \Omega \in (-\frac{\Omega_s}{2}, \frac{\Omega_s}{2}] \\ 0, & \text{それ以外}. \end{cases}$$

- 信号 x はフーリエ変換可能と仮定したから，X_{FT} を逆フーリエ変換すると x に戻る．すなわち次式が成り立つ．積分の範囲が $(-\frac{\Omega_s}{2}, \frac{\Omega_s}{2}]$ で良いのは，その範囲外では $X(\Omega) = 0$ だから．

$$x(t) = \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\frac{\Omega_s}{2}}^{\frac{\Omega_s}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] e^{-jn\Omega T_s} e^{j\Omega t} d\Omega$$

- まとめると:

  信号 x が上述の条件を満たすとき, $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ から $(X_{\mathrm{DTFT}}$ を経由して$)$ X_{FT} が決定され, それを逆フーリエ変換することにより連続時間信号 x が復元される.

- 歴史的経緯から, この事実を**標本化定理**あるいは**サンプリング定理**と呼ぶ. 内容はフーリエ変換そのものなので証明は不要.

- $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ から連続信号 x を復元する式は有用なので導出しておく.
- $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}} \in l_1$ と仮定したから, 無限和と積分の順序を交換できる. そこで, 順序を交換し, 各項の積分を計算する.
- 後で使うために, $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ と定義しておく. また, 以下の計算では, 随時 $\Omega_s = 2\pi/T_s$ を用いる.

$$
\begin{aligned}
\frac{T_s}{2\pi}\int_{-\frac{\Omega_s}{2}}^{\frac{\Omega_s}{2}} e^{j(t-nT_s)\Omega} d\Omega &= \frac{T_s}{2\pi}\frac{1}{j(t-nT_s)}\, e^{j(t-nT_s)\Omega}\Big|_{-\frac{\Omega_s}{2}}^{\frac{\Omega_s}{2}} \\
&= \frac{T_s}{\pi(t-nT_s)}\frac{e^{j\frac{(t-nT_s)\Omega_s}{2}} - e^{-j\frac{(t-nT_s)\Omega_s}{2}}}{2j} \\
&= \frac{T_s}{\pi(t-nT_s)}\frac{e^{j\frac{\pi(t-nT_s)}{T_s}} - e^{-j\frac{\pi(t-nT_s)}{T_s}}}{2j} \\
&= \frac{1}{\pi(t/T_s-n)}\frac{e^{j\pi(t/T_s-n)} - e^{-j\pi(t/T_s-n)}}{2j} \\
&= \frac{1}{\pi(t/T_s-n)}\sin(\pi(t/T_s-n)) = \mathrm{sinc}(\pi(t/T_s-n)).
\end{aligned}
$$

- 以上の計算によって, x の各時刻 t における値は, $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ から, 次の式によって復元されることがわかった. これも**標本化定理**あるいは**サンプリング定理**と呼ぶことがある.

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] \,\mathrm{sinc}\left(\pi \frac{t}{T_s} - n\right).$$

- 「標本化」と「サンプリング」は同じ意味であるが, 文献では, どちらかと言うと, 「サンプリング」を用いることが多いようである.

- ここまでの議論では, デルタ関数は使わなかった. ディジタル信号処理においてデルタ関数を積極的に使う必要がある状況はあまり多くないと思われる.
- デルタ関数の数学的に正確でかつ最も簡単な導入は, Lebesgue積分を前提として, Dirac 測度と呼ばれる測度に関する積分によってデルタ関数を定義する, というものである. これについては, 時間に余裕がある回があればそこで述べる.
- 詰み残しになっている離散時間フーリエ変換の性質の証明も, 時間に余裕がある回があれば, そこで議論する.