ディジタル信号処理

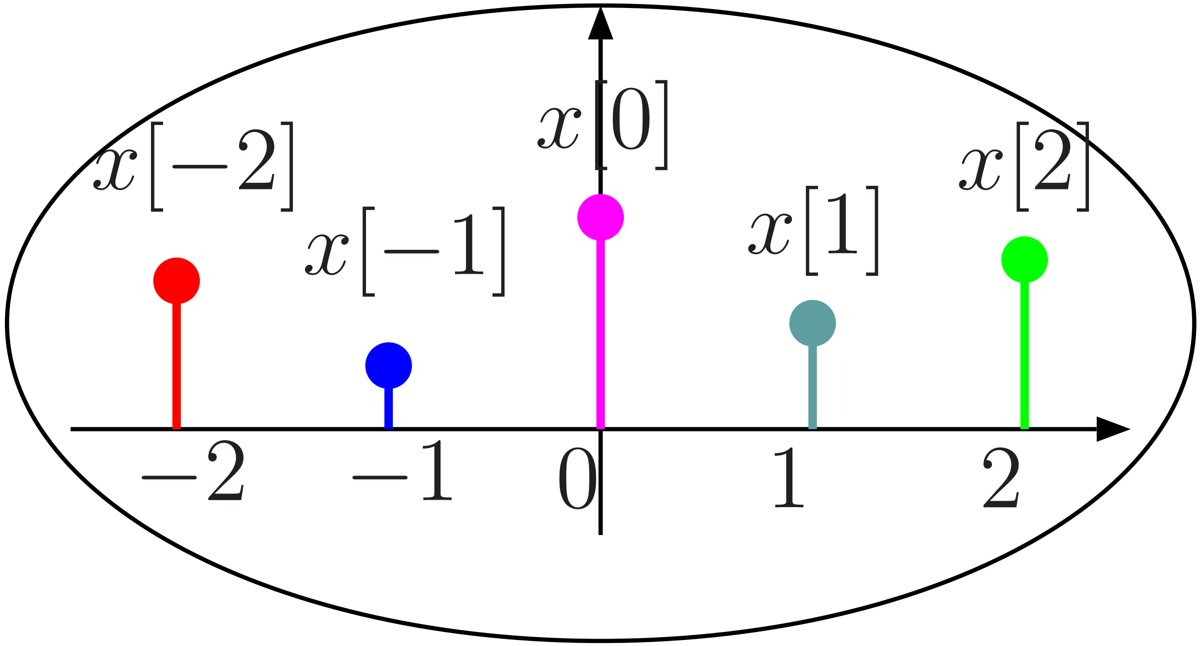
第 2 回

信号の畳み込みとシステムの諸性質

記法について

- 教科書では「信号」と「信号のある時刻における値」が区別されていない
- 信号は数学的には数列のことで, $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ のように表記できるが $\cdots$
- 以下しばしば添字を略した x によって信号全体をあらわす

x あるいは $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$



この講義資料での記法:

x $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$	信号全体
$x[n]$	信号の時刻 n における値

- 離散時間の単位インパルス δ は $\cdots$
  $\delta[0] = 1$, $\delta[n] = 0 (n \neq 0)$
- 時間軸に関して m シフトさせる作用素を τ_m とおく. $(\tau_m x)[n] = x[n-m]$ である.
- $(\tau_m x)[m] = x[0]$, $(\tau_{m+1} x)[m] = x[1]$, $\ldots$ だから, 波形全体が m だけ右にずれている.

作用素τ_m が

信号x に作用して

時刻nにおける値は

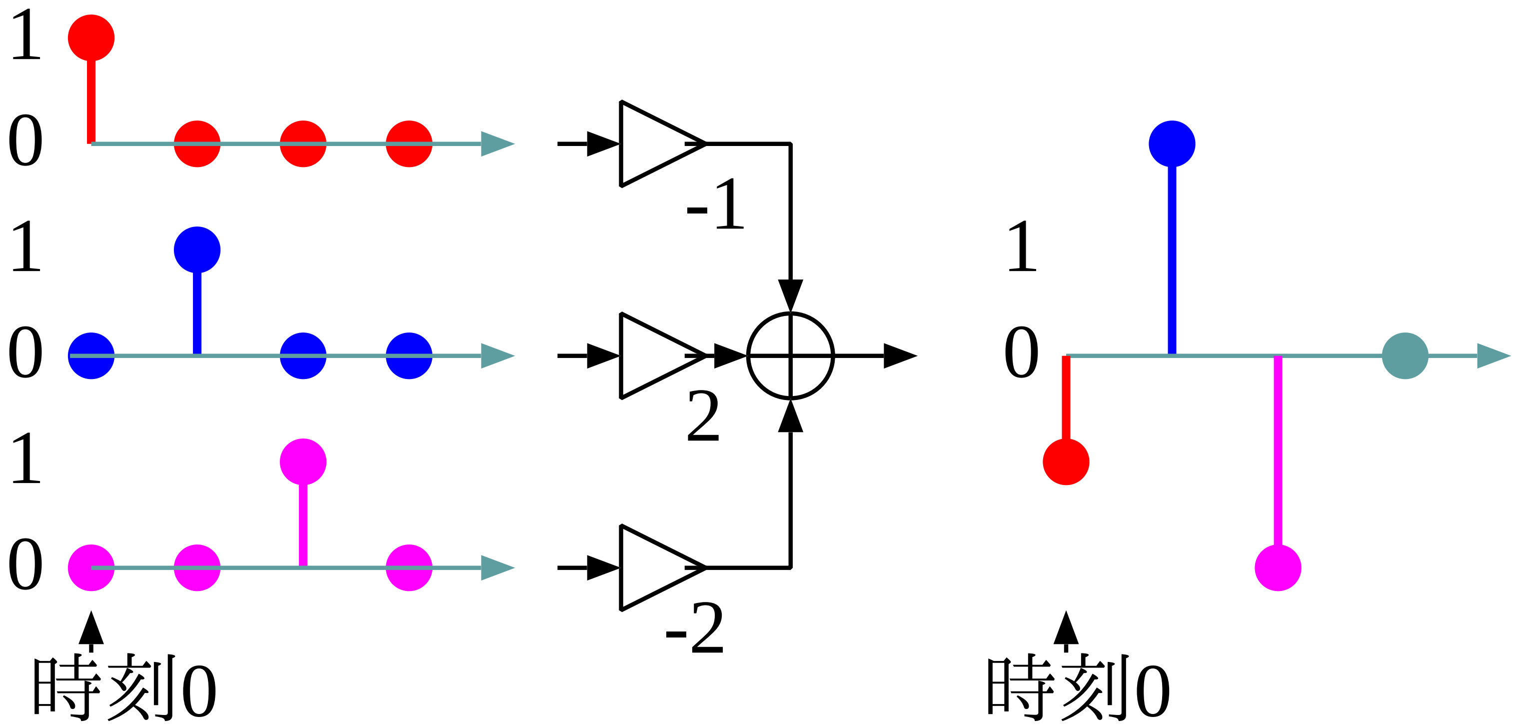
$(\tau_m x)[n] = x[n-m]$ 信号xの時刻n-mにおける値に等しい

得られた信号$(\tau_m x)$ の

畳み込み

- $\tau_m\delta$ を δ_m と書く ($\tau_0\delta = \delta_0$ は δ とも書く) と…
- $x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta_m$ となる.
- 教科書では上記の δ_m を $\delta[n-m]$ と書いているが (13 ページ), このように書くと, δ を m だけシフトさせた信号なのか, δ の時刻 $n-m$ の値なのかが, わからない.

たとえば, $(-1)\delta_0 + 2\delta_1 + (-2)\delta_2$ は $\cdots$



この講義資料での記法:

δ	単位インパルス
τ_m	時間軸に関して m シフトする演算子
δ_m	$\delta_m = \tau_m \delta$

- $x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta_m$ であったが $\cdots$
- x の右辺の時刻 n における値を考えると $\cdots$
- $x[n] = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta_m\right)[n]$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (x[m]\delta_m)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta_m[n]$$ で $\cdots$

- $\delta_m[n] = \delta[n-m]$ だから (どちらも $n = m$ のとき 1, それ以外で零) $\cdots$
- $x[n] = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]$ で $\cdots$
- 教科書 14 ページ式 2.4 が出て来る.

- $L[\cdot]$ を線形時不変システム, $y = L[x]$ とする.
- $L[x] = L\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta_m\right]$

  $= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]L[\delta_m]$ となる.
- $\delta_m = \tau_m \delta$ で, $L[\cdot]$ は線形時不変だから,

  $L[\tau_m \delta] = \tau_m L[\delta]$ となる.

- $L[\tau_m \delta] = \tau_m L[\delta]$ は自明な式ではない ($L[\cdot]$ が線形時不変だから成り立つ).
    - ▷ システムに入力 δ を m だけ遅延させて印加したときの出力と $\cdots$
    - ▷ システムに入力 δ を印加して得られた出力を m だけ遅延したものが $\cdots$

同じ, という意味で, 線形時不変システムの性質のひとつ.

- $h = L[\delta]$ とおいて先の式に代入すると $\cdots$
- $L[x] = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m](\tau_m h)$ となる.
- $y[n] = \displaystyle\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m](\tau_m h)\right)[n]$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m](\tau_m h)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

- 信号 u と信号 v に対し, $u * v$ という新しい信号を次式によって定義する.

$$(u * v)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]v[n-m].$$

これを u と v の畳み込み (たたみこみ) あるいは, 重畳, **convolution** と呼ぶ.

- 単位インパルス δ に対するシステムの応答 $L[\delta]$ をインパルス応答という.

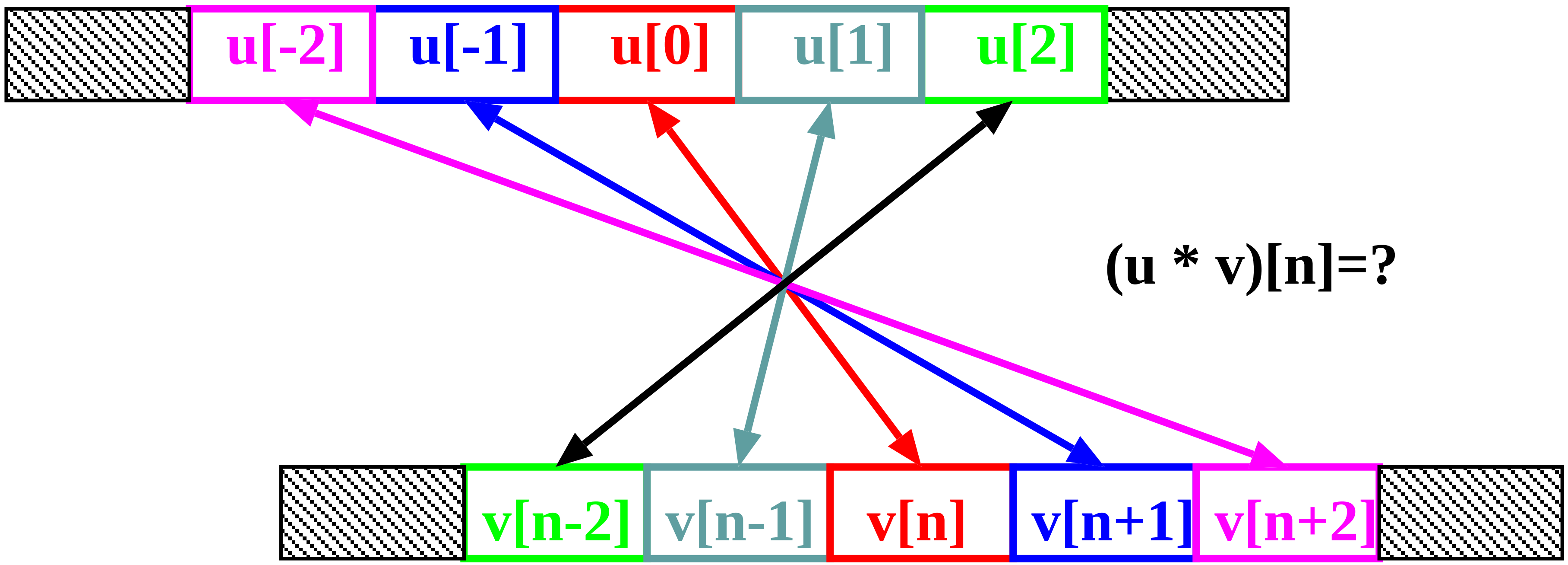
- 上述の結果をまとめると, $h = L[\delta]$ としたとき, $L[x] = h * x$ である. すなわち, 線形時不変システムの入力 x に対する応答は, x とシステム $L[\cdot]$ のインパルス応答の畳み込みになる.

畳み込みの計算例

- 信号 u: $u[0] = 1,\ u[1] = 2,\ u[2] = 5,\ u[n] = 0$ $(n \neq 0, 1, 2)$
- 信号 v: $v[0] = 1,\ v[1] = 1,\ v[n] = 0$ $(n \neq 0, 1)$
- $(u*v)[-1] = \cdots + u[-2]v[1] + u[-1]v[0] + u[0]v[-1] + \cdots = 0$
- $(u*v)[0] = \cdots + u[-1]v[1] + u[0]v[0] + u[1]v[-1] + \cdots = u[0]v[0] = 1$

- $(u*v)[1] = \cdots + u[-1]v[2] + u[0]v[1] + u[1]v[0] + u[2]v[-1] + \cdots = u[0]v[1] + u[1]v[0] = 3$
- $(u*v)[2] = \cdots + u[-1]v[3] + u[0]v[2] + u[1]v[1] + u[2]v[0] + u[3]v[-1] + \cdots = u[1]v[1] + u[2]v[0] = 7$
- $(u*v)[3] = \cdots + u[-1]v[4] + u[0]v[3] + u[1]v[2] + u[2]v[1] + u[3]v[0] + u[4]v[-1] + \cdots = u[2]v[1] = 5$
- $(u*v)[4] = \cdots + u[-1]v[5] + u[0]v[4] + u[1]v[3] + u[2]v[2] + u[3]v[1] + u[4]v[0] + \cdots = 0$

$(u*v)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]v[n-m]$ を図に直すと…



$(u * v)[0] =?$

- $(u * v)[n] = \sum_{m=0}^{\infty} u[m]v[n-m]$ に $n = 0$ を入れて $\cdots$
- $(u * v)[0] = \cdots + u[-2]v[2] + u[-1]v[1] + u[0]v[0] + u[1]v[-1] + u[2]v[-2] + \cdots$

$$\left.\begin{array}{ccc} & \cdots & \\ u[-2] & \times & v[2] \\ u[-1] & \times & v[1] \\ u[0] & \times & v[0] \\ u[1] & \times & v[-1] \\ u[2] & \times & v[-2] \\ & \cdots & \end{array}\right\} \sum$$

$(u * v)[1] =?$

- $(u * v)[n] = \sum_{m=0}^{\infty} u[m]v[n-m]$ に $n = 1$ を入れて $\cdots$
- $(u * v)[1] = \cdots + u[-2]v[3] + u[-1]v[2] + u[0]v[1] + u[1]v[0] + u[2]v[-1] + \cdots$

$$
\left.
\begin{array}{lcl}
 & \cdots & \\
u[-2] & \times & v[3] \\
u[-1] & \times & v[2] \\
u[0] & \times & v[1] \\
u[1] & \times & v[0] \\
u[2] & \times & v[-1] \\
 & \cdots &
\end{array}
\right\} \sum
$$

$(u * v)[2] = ?$

- $(u * v)[n] = \sum_{m=0}^{\infty} u[m]v[n-m]$ に $n = 2$ を入れて $\cdots$
- $(u * v)[2] = \cdots + u[-2]v[4] + u[-1]v[3] + u[0]v[2] + u[1]v[1] + u[2]v[0] + \cdots$

$$
\left.\begin{array}{lcl}
 & \cdots & \\
u[-2] & \times & v[4] \\
u[-1] & \times & v[3] \\
u[0] & \times & v[2] \\
u[1] & \times & v[1] \\
u[2] & \times & v[0] \\
 & \cdots &
\end{array}\right\} \sum
$$

$$
\begin{array}{ll|l|l|l|}
 & & n=0 & n=1 & n=2 \\
 & & \cdots & & \\
u[-2] & \times & v[2] & v[3] & v[4] \\
u[-1] & \times & v[1] & v[2] & v[3] \\
u[0] & \times & \color{red}{v[0]} & v[1] & v[2] \\
u[1] & \times & v[-1] & \color{red}{v[0]} & v[1] \\
u[2] & \times & v[-2] & v[-1] & \color{red}{v[0]} \\
 & & \cdots & &
\end{array}
$$

- 教科書 pp. 15–18 の計算は各自で追うこと．
- 畳み込みのことを**線形畳み込み**あるいは**直線畳み込み**と呼ぶことがある．この用語は，離散 Fourier 解析 (教科書 5 章) で用いられる**循環畳み込み**と呼ばれる概念との混乱を防ぐために用いられる．

復習

$\delta_m = \tau_m \delta$	$x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta_m$	$h = L[\delta]$

$$L[x] = L\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta_m\right]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]L[\delta_m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\tau_m h$$

$L[x]$ の時刻 n における値は:

$$\begin{aligned}(L[x])[n] &= \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\tau_m h\right)[n] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\tau_m h[n] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]\end{aligned}$$

畳み込みの性質 (教科書 pp. 18–19)

以下では，$u \in l_1$ とは，$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |u[m]| < \infty$ であることと定義する．

- l_1 に属する信号に対して畳み込みは可換，すなわち $u, v \in l_1$ に対し $u * v = v * u$ である．
- l_1 に属する信号に対して畳み込みは加算に対して分配的，すなわち $u, v, w \in l_1$ に対し，$u * (v + w) = u * v + u * w$ である．

$u * v = v * u$ となること

- n を固定すると, $(u * v)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]v[n-m]$).
- n を固定すると, $(v * u)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k)u[n-k]$)(変数 k で和を取る). $n - k = m$ とおく. n を固定したとき, k が $-\infty$ から ∞ まで動けば, $m = n - k$ も $-\infty$ から ∞ まで動く. 第 2 の式で和をとる変数を k から m に変えて $n - k = m$ を代入すると, $(v * u)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[n-m])u[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]v[n-m]$).
- よって $\forall n, (u*v)[n] = (v*u)[n]$. したがって $u*v = v*u$.

$u*(v+w)=u*v+u*w$ となること

- 以下，曖昧さが発生しないときは，和の範囲を略し，$\sum_{m=-\infty}^{\infty}$ を $\sum_m$ と書くことがある．
- n を固定すると，$(u*(v+w))[n]$
$= \sum_m u[m](v+w)[n-m]$
$= \sum_m u[m](v[n-m]+w[n-m])$
$= \sum_m u[m]v[n-m] + \sum_m u[m]w[n-m]$
$= (u*v)[n] + (v*w)[n].$
- よって $\forall n$, $(u*(v+w))[n] = (u*v)[n] + (v*w)[n]$ だから，$u*(v+w) = u*v + v*w$

- l_1 に属する信号に対して畳み込みは結合的である．すなわち，$u, v, w \in l_1$ であれば，$u * (v * w) = (u * v) * w$ となる．

$u * (v * w) = (u * v) * w$ となること (1)

- $u, v, w \in l_1$ とする.
- n を固定; $(u * (v * w))[n] = \sum_m u[m](v * w)[n-m] = \sum_m \sum_k u[m]v[k]w[n-m-k]$
- n を固定; $((u * v) * w)[n] = \sum_p (u * v)[p]w[n-p] = \sum_p \sum_m u[m]v[p-m]w[n-p]$
  $= \sum_m \sum_p u[m]v[p-m]w[n-p]$
  (ここで和の順番の入れ換えをしている).

$u * (v * w) = (u * v) * w$ となること (2)

- m を固定したとき, $k = p - m$ とおくと, p が $-\infty$ から ∞ まで動けば k も $-\infty$ から ∞ まで動くから, 和を取る変数を k に変えて, $((u*v)*w)[n] = \sum_m \sum_k u[m]v[k]w[n-m-k]$. これは $(u * (v * w))[n]$ の式と同じ.
- $\forall n,\ (u * (v * w))[n] = ((u * v) * w)[n]$ だから, $u * (v * w) = (u * v) * w$.
- 上述の議論では, 和の順番の入れ換えが本質的に重要.

- $u, v, w \in l_1$ という仮定は重要で，この仮定が満たされないときには，上記の性質が成り立つことは必ずしも保証されない．
- 数学的に言うと，条件収束するが絶対収束しない級数は項の並べ換えることにより任意の数に収束するようにできる．(たとえば G. E. Shilov, Elementary Real and Complex Analysis, Dover, 1996 参照)．よって，絶対収束 (l_1 のこと) を仮定しないと，いろいろな不都合が発生する．

システムの直列接続

- 線形時不変システム $L_1[\cdot]$ と $L_2[\cdot]$ が直列に接続されているものとする．$L_1[\cdot]$ と $L_2[\cdot]$ のインパルス応答を h_1, h_2 とする．x を入力とする．$y_1 = L_1[L_2[x]], y_2 = L_2[L_1[x]]$ とする．
- $L_{12}[\cdot]$ をインパルス応答 $h_1 * h_2 = h_2 * h_1$ を持つシステムとする．

- $h_1, h_2, x \in l_1$ と仮定する (結合則を用いるためにこの仮定が必要).
- $y_1 = L_1[L_2[x]] = L_1[h_2 * x] = (h_1 * (h_2 * x)) = (h_1 * h_2) * x.$
- $y_2 = L_2[L_1[x]] = L_2[h_1 * x] = (h_2 * (h_1 * x)) = (h_2 * h_1) * x = (h_1 * h_2) * x.$
- したがって, $L_1[L_2[x]] = L_2[L_1[x]] = L_{12}[x]$ (教科書 p.20 図 2.5)

システムの並列接続

- 直列接続の議論と時と同一の仮定の下で, $L_1[\cdot]$ と $L_2[\cdot]$ を並列に接続する
- $L_{1+2}[\cdot]$ をインパルス応答 $h_1 + h_2$ を持つシステムとする.
- $L_{1+2}[x] = (h_1 + h_2) * x = h_1 * x + h_2 * x = L_1[x] + L_2[x]$ (教科書 p.20 図 2.6)

因果的なシステム

- システム $y = L[x]$ が**因果的**であるとは，その出力が現在および過去の入力のみから決まり，未来の入力に依存しないことをいう．また，そのような性質を**因果性**という．**因果性は名詞**，**因果的な**は形容詞である．
- $L[\cdot]$ は線形時不変システムで，そのインパルス応答を h とする．

- $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$ であるから, このシステムが因果的であることは, 上式において $x[n+1], x[n+1, \ldots$ の係数が零, すなわち $m < 0$ に対し $h[m] = 0$ であることと等価.
- インパルス応答は時刻零で振幅 1 の入力があったときのシステムの応答だから, 負の時間で応答波形が出ていれば因果的でないのは当然.

安定性

- 「安定」とは (大辞林 第 3 版) ⋯
  - ▷ 落ち着いて変動の少ないこと
  - ▷ ある系が外からの作用により微小な変化を与えられても, もとの状態からのずれが一定の範囲に収まるような状態

- 安定性に関する議論をする際には, 内部状態に着目する場合と, 入出力関係に着目する場合があるが, この講義は入出力関係に着目する場合のみを対象とする.
- $y = L[x]$ という入出力関係を持つシステムが x が有界なら y も有界という性質を持つとき, このシステムは **BIBO 安定** (Bounded Input Bounded Output Stable) であるという.

- 教科書には定義が明確な形で書かれていないが, 上記の BIBO 安定性が教科書の安定性の定義. 教科書ではこれを安定と呼んでいる.
- インパルス応答 h を持つ線形時不変システム $L[\cdot]$ を考える.

- 入力 x を $x[n]=\mathrm{sgn}(h[-n])$ とすると (sgn は符号を返す関数), $(L[x])[0] = (h*x)[0] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\mathrm{sgn}(h[m]) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]|$. よって, このシステムがBIBO安定であるためには, $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]| < \infty$ でなければならない.

- 逆に, $\sum_{m=-\infty}^{\infty}|h[m]| < \infty$ であるとき, x が有界, すなわち $\exists K \geq 0, \forall n, |x[n]| \leq K$ であれば, っ $|L[x](n)| \leq K\sum_{m=-\infty}^{\infty}|h[m]|$ だから, このシステムはBIBO 安定である.
- 以上によって, 線形時不変システム $L[\cdot]$ がBIBO 安定であるための必要十分条件は, そのインパルス応答 h が $\sum_{m=-\infty}^{\infty}|h[m]| < \infty$ を満たすことであることがわかった.

- 教科書 22 ページ下から 2 行目の「インパルス応答が有限時間で零になる」という記述は間違い.

教科書では畳み込みの応用例として音響システムが挙げられているが, 畳み込みは線形時不変システムを取り扱うときにはつねに出て来るものであり, 殊更に音響システムを強調する意味はないので, 講義では割愛する.

l_1 と因果性

- 信号処理は, 大別すると,
  - ▷ 記憶媒体に記録された信号の非リアルタイム処理
  - ▷ 信号のリアルタイム処理

に分類される.

- 非リアルタイム処理の対象となる信号は有限長である (でなければ記録できない). この信号は, 信号がない部分を零とおくことにより, l_1 の信号に拡張される. 畳み込みを定義する際に, 対象となる信号が実質的に有限長である (すなわち, 信号が非零となる時刻は有限個) と仮定しておけば, 畳み込みの性質の項で述べた諸問題が発生することはない.

- 因果的な信号処理では, 対象となる信号も, システムのインパルス応答も, 負の時刻では値が恒等的に零である．対象となる信号がすべて因果的であれば, これらの畳み込みは有限の時刻ではつねに有限和となる．よって, 因果的な信号の畳み込みでは, 信号が l_1 に属するという仮定は不要である．