電 341
ディジタル信号処理
担当者: 半場 滋

教科書: 有木 康雄 (編) ディジタル信号処理, オーム社 (2013)

- 比較的新しい本
- かなりの程度教科書に準拠して進む
- よって講義資料は少な目
- Web 版シラバスを読んでおくこと

第 1 回
離散時間信号と
システム

はじめに

- 教科書では単刀直入に技術的な解説が始まっているが, 講義では, ディジタル信号処理を学ぶ動機付けから始める.
- 「日本における情報通信分野の現状と課題」(総務省)

http://www.tele.soumu.go.jp/resource/j/equ/mra/pdf/27/04.pdf

講義資料としては配付しないので, 興味がある者は各自でダウンロードすること.

- 総務省の資料では移動体通信の市場の爆発的な拡大が紹介されているが …
- 総務省の資料 4 ページを思い出すと …
- 携帯電話は, 1980 年代の第一世代にはアナログであったが, 第二世代 (1993) 以降はすべてディジタル

ディジタル信号処理はディジタル通信の基礎でもあるが, 通信関連はこの講義では取り扱わない; 通信に興味がある者は通信工学 I・II を受講せよ

- この分野は技術の進歩が早い
- 携帯電話でインターネットが使えるようになったのは第二世代 (1993 年), 音楽や映像等の配信が始まったのは第三世代 (2001 年), 光ファイバと同等の情報量が確保されたのは第四世代 (2015)
- 技術者はこのペースに対応する必用がある

- 先ほど音楽, 映像や動画配信の話をしたが ⋯
- 我々の耳目に入る時点では, これらの信号はアナログ (すなわち ⋯)
    - ▷ 音声の時間軸は実数 (連続時間), 信号の値も実数 (連続値)
    - ▷ 画像の座標は $\mathbb{R}^2$, 画像の値は実数 (グレースケール) あるいはその組 (カラー)

- 我々が住む物理的世界の信号は, 日常生活のスケールでは, おおむねアナログ
- アナログ信号をアナログのまま処理する手法こともあるが …
- 今日では, 日常生活でも, ディジタル信号に触れる機会が多い

- CD は 1982 年発売; アナログレコードを駆逐

https://www.sony.co.jp/SonyInfo/CorporateInfo/History/SonyHistory/2-08.html

- VTR(VHS) は DVD やブルーレイに
- デジタルカメラは 1975 年に開発

https://www.telegraph.co.uk/finance/newsbysector/retailandconsumer/9024539/Kodak-130-years-of-history.html

今日ではスマホで静止画や動画を撮影可能;
フィルム式写真機を目にすることは稀

- マイクが拾った信号をコンピュータで処理して再生するときは: 録音信号 (アナログ) をディジタル信号に変換してから処理し, それをアナログに戻してスピーカに送る
- ディジタル通信では, 送信側はディジタル信号を変調して送信, 受信側は受信信号を復調してディジタル信号を復元
- この講義の対象となるのは前者

ディジタル信号処理とは何か

以下しばらく主に「ディジタル信号処理ハンドブック」(オーム社, 1993) に準拠して説明

- ディジタルな　信号処理?
ディジタル信号の　処理?
- 一般的には前者;「アナログ信号のディジタル処理」と解釈するとよい (後者は意味が広すぎる)

なぜディジタル処理? 利点は?(1)

- ディジタル処理は柔軟:
  - ▷ コンピュータのプログラムで書けることは何でもできる
  - ▷ システムの拡張が容易

なぜディジタル処理? 利点は?(2)

- ディジタル処理は高品質：
  - ▷ 量子化雑音 (後述), 演算雑音のみを考慮すればよく想定外の雑音が混入するリスクが少ない
  - ▷ 長期記憶が可能で, 経年変化や環境の変動の影響を受けにくい

なぜディジタル処理? 利点は?(3)

- ディジタル処理はLSI化および大量生産によって小型化, 低コスト化が可能
- 中心部分はコンピュータのプログラムなので, 仕様変更に柔軟に対応可能で, 相対的に開発者の熟練を要さず, 製品のばらつきが少ない

ディジタル処理の欠点は?

- 処理内容が極めて簡単なときには回路規模的にアナログ処理と比べて不利
- 処理速度に限界がある (CPU, I/O 等の能力)
- 量子化雑音, 演算雑音の影響がある
- クロックの発する高周波雑音が周辺回路に影響することがある

離散時間信号・ディジタル信号

- 音声のような時間とともに変わる信号を考える (アナログ信号)
- コンピュータで処理するために, 飛び飛びの時刻 (簡単には一定周期) で, 信号の標本を取得する (標本化; サンプリング (sampling)). 標本化された信号を離散時間信号 (あるいはサンプル値信号) という.

- 上記に続き, 標本化された信号の値 (連続値) を離散的な値 (とり得る値が有限個) に変換する (量子化). 標本化および量子化された信号をディジタル信号と呼ぶ (教科書の定義).
- 量子化とは, 有限個のビットパターンの中で, その示す数値が量子化したい信号の値に最も近いものを選ぶ操作であり, 近似誤差が伴う (量子化誤差).

- 上記と異なる定義を採用している本もあるので注意
- この講義では，教科書に従い，ディジタル信号とは，標本化および量子化された信号であると定義する．
- 時間軸が連続的で，信号の取りうる値が有限個の信号を，多値信号と呼ぶことがある (樋口・川又, MATLAB 対応ディジタル信号処理, 昭晃堂, 2000)

- 最も単純には, 標本化は一定時間ごとにおこなわれる (この講義ではこのような状況のみを考える); この周期を**標本化周期**あるいは**サンプリング周期**という.
- 標本化周期の逆数を**標本化周波数**あるいは**サンプリング周波数**という.
- 標本化周波数に 2π を乗じたものを**標本化角周波数**あるいは**サンプリング角周波数**という.

- サンプリング周期を T_s とすると, 離散時間信号あるいはディジタル信号の値は T_s の整数倍 $(0, T_s, 2T_s, 3T_s, \ldots)$ の時刻のみで定義されるが $\cdots$
- サンプリング周期 T_s を毎回書くのは冗長なので, これを略して, 時間軸を整数 $(0, 1, 2, 3, \ldots)$ と書き直すことが多い

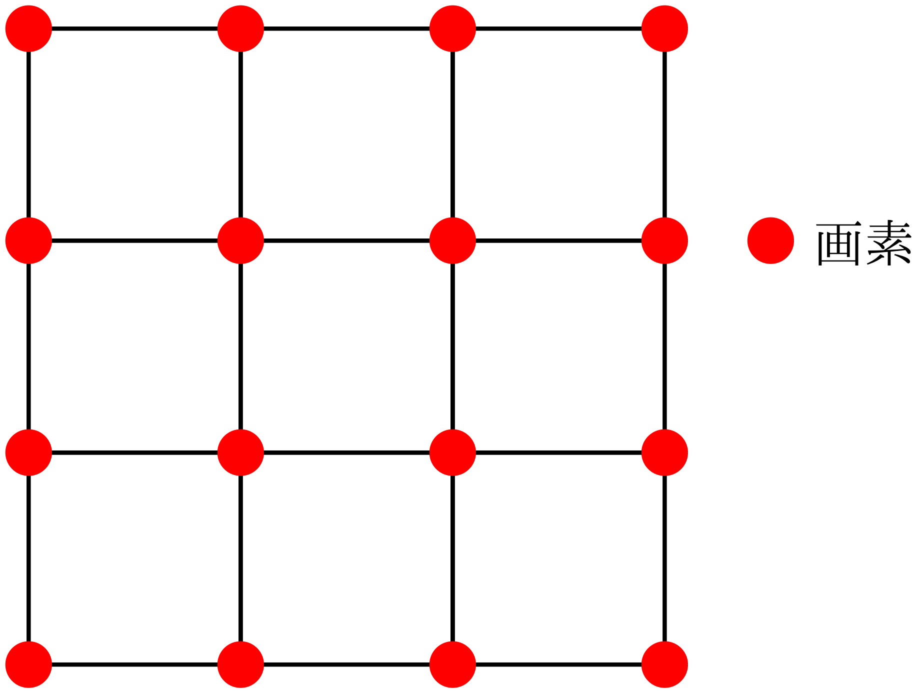
- $x(t)$ を標本化すると $(x(0), x(T_s), x(2T_s), \ldots)$ となるが, T_s を略して $(x(0), x(1), x(2), \ldots)$ と書くことが多い
- 教科書では時間を表記するときに角括弧を使っているので, この講義資料でも (おおむね) $(x[0], x[1], x[2], \ldots)$ と書く.

- カラーの静止画像は, 画像上の座標を (x, y) とし, その座標における赤, 緑, 青の色強度を $R(x, y)$, $G(x, y)$, $B(x, y)$ とすることにより表現できる.
- ディジタル信号処理のために標本化および量子化が必用なことは音声等と同じ.
- 標本化のために, 画像上に, 正方形, 正三角形あるいは六角形の格子を敷き詰める.

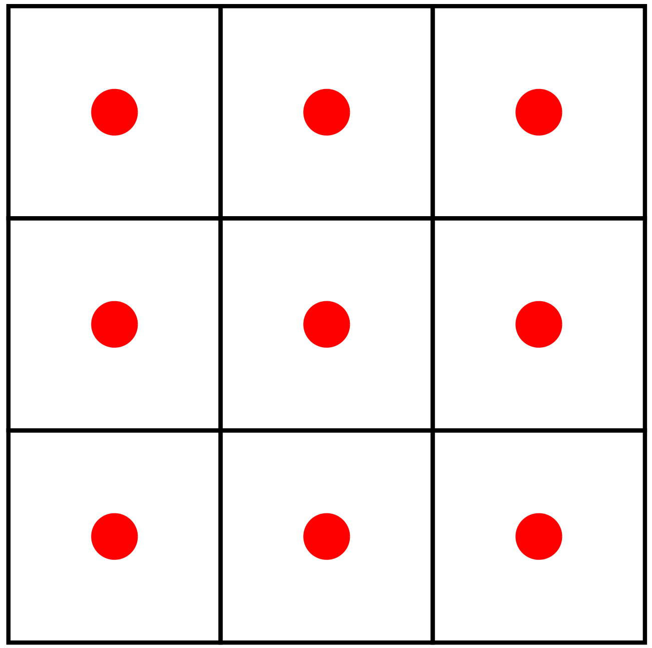
- 格子から得られる標本点を**画素**あるいはピクセルと呼ぶが…
- 画素の取り方には, 多角形の敷き詰めに対し,
  - ▷ 格子点を画素とする
  - ▷ 多角形の重心を画素とする

流儀がある (田村, コンピュータ画像処理, オーム社, 2002)

正方形格子の場合は…



方法１：格子点が画素



方法２：多角形の重心が画素

正三角形, 正六角形の場合も同様

- 正方形格子で, x 軸に関して i 番目, y 軸に関して j 番目の画素の値は $(R[i,j], G[i,j], B[i,j])$ と書ける.
- これを量子化してディジタル信号を作ることも音声と同様
- 濃淡画像の場合は 3 成分は不要, 白黒画像は始めから 2 値
- 色の表現は RGB 以外にもある (講義後半)

- カラーの動画像は, 時刻を t, 画像上の座標を (x, y) とし, その時刻および座標における赤, 緑, 青の色強度を $R(t, x, y), G(t, x, y), B(t, x, y)$ とすることにより表現できる.
- ここからディジタル信号を得る手順は音声と静止画像に対して用いられたものの組み合わせ

- コンパクトディスクのサンプリング周波数は 44.1kHz, 量子化ビット数は 16 ビット
- DVD オーディオのサンプリング周波数は 44.1/88.2/48/96/176.4/192kHz, 量子化ビット数は 16/24 ビット

  https://pc.watch.impress.co.jp/docs/article/980911/dvd.htm

- 一般的なパソコンの表示画素数は 1920×1080 画素, 24 ビット

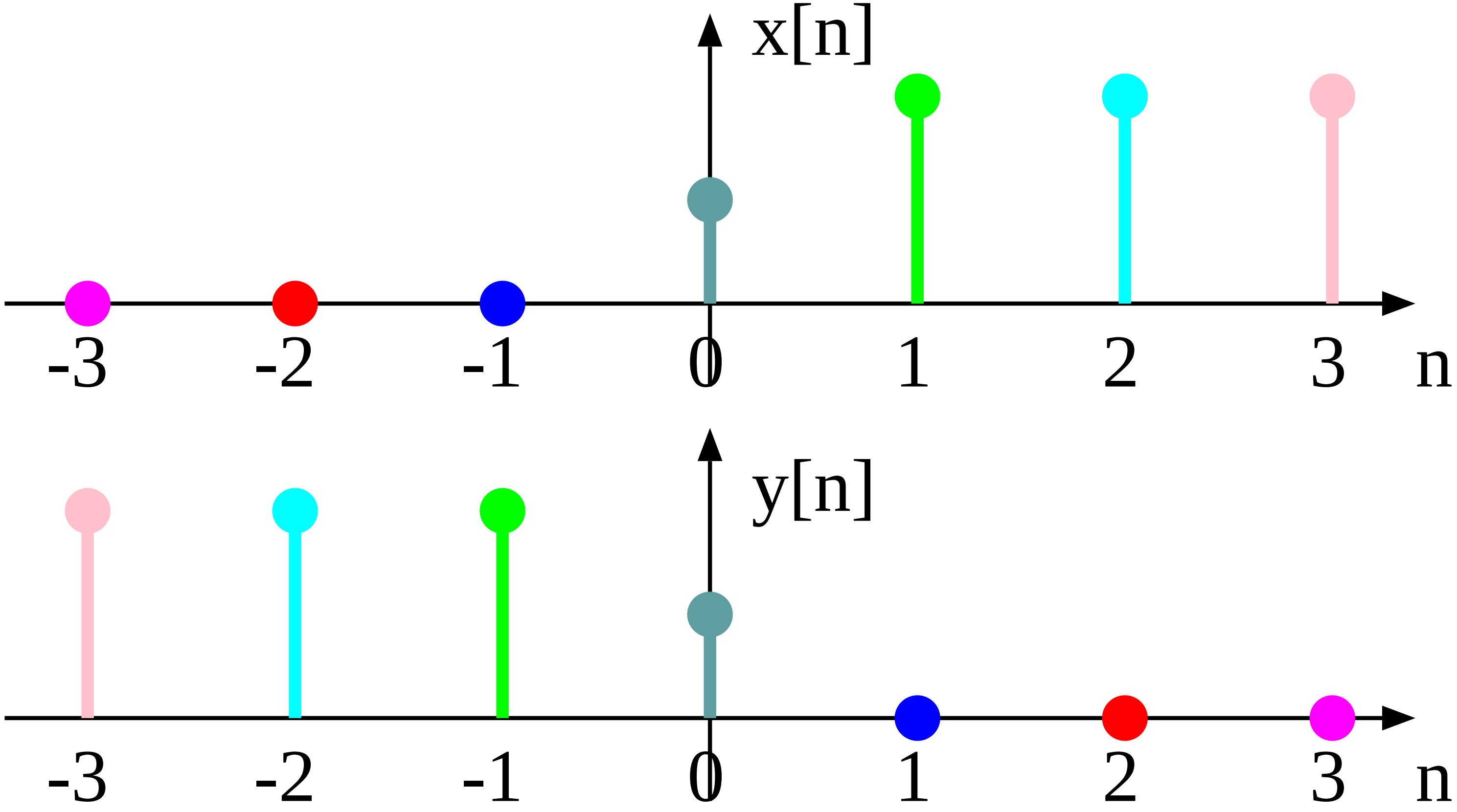
離散時間の基本信号

- 当分はスカラー値の離散時間信号を考える.
- サンプリング周期 T_s の情報を略し, 時間に関する添字を n で表す (n は整数とする).
- 信号 x の時刻 n における値を $x[n]$ と表記する.
- 教科書 3 ページ図 1.4 にあるように, 離散時間信号を縦棒と丸で表示することが一般的.

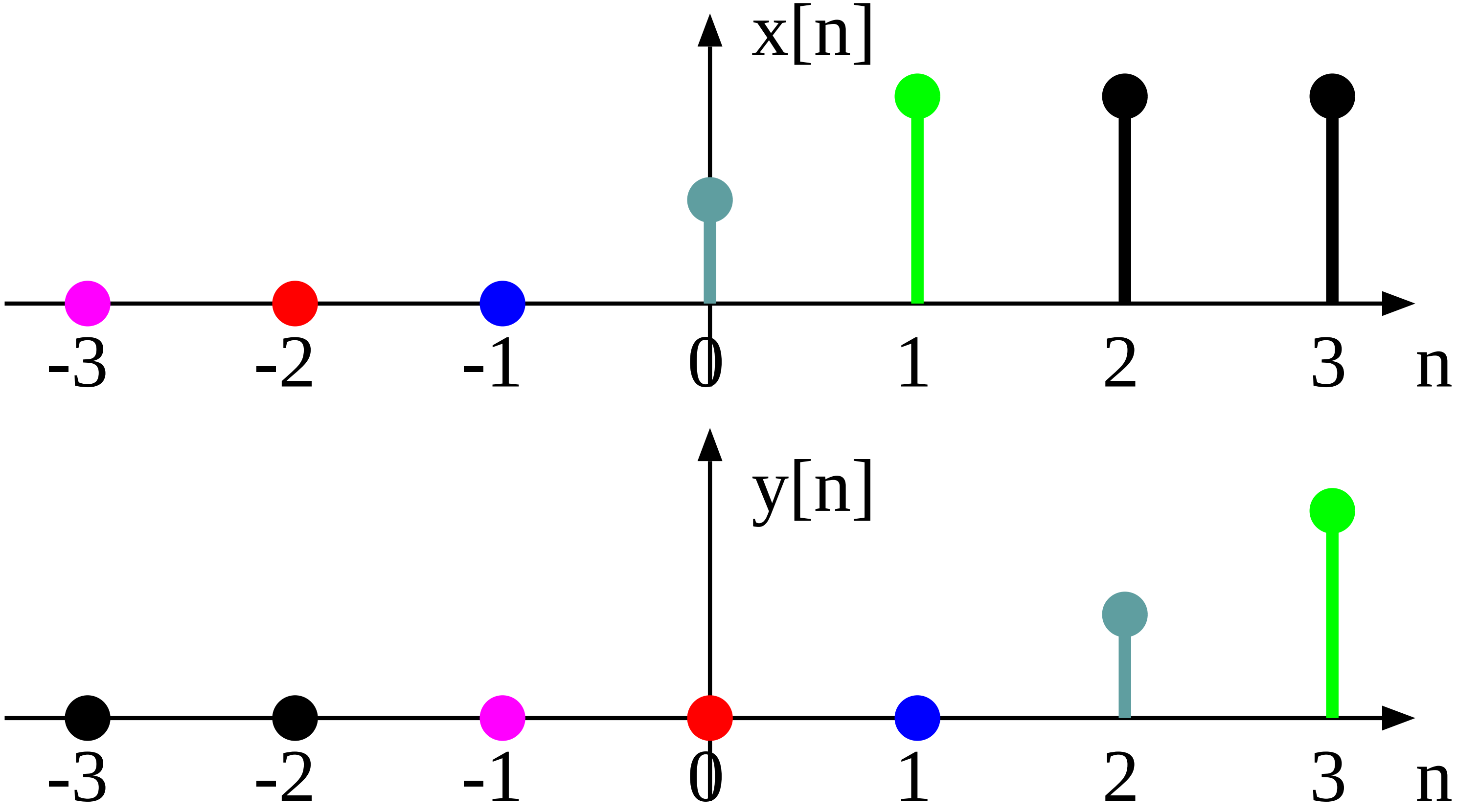
- 信号 $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ を考える.
- $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合
- $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ は n を添字とする数列をあらわす
- $\{x[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と書くこともある
- 数学的には, 信号とは数列のこと.

- 反転とシフトは信号に対する基本的な演算
- $(y[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ が, $y[n] = x[-n]$ を満たすとき, $(y[n])_{n\in Zset}$ は $(x[n])_{n\in Zset}$ の反転
- 教科書の表記では, 信号全体と信号のある時刻における値の区別が曖昧になっている
- $(y[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ が, $y[n] = x[n-p]$ を満たすとき, $(y[n])_{n\in Zset}$ は $(x[n])_{n\in Zset}$ を **p** だけシフトした信号

$(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ を反転:



$(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ を 2 シフト:



- **単位インパルス** $(\delta[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ は, $n=0$ で 1, $n\neq 0$ で 0 となる信号 (教科書 図 1.6, p.4). この信号はディジタル信号処理において, Dirac のデルタ関数と類似した役割を果たす.
- **単位ステップ** $(u[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ は, $n<0$ で 0, $n\geq 0$ で 1 という値を取る信号 (教科書 図 1.7, p.5 を参照). $u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n]$ という関係が成り立つ.

- 教科書では, 信号全体とその時刻 n における値を区別していないので, $\delta[n]$, $u[n]$ は単位インパルスあるいは単位ステップそのものと, その時刻 n における値を表す. どちらの意味かは文脈で判断する.
- 講義資料では, 信号全体を表すことを強調するときには, $(\delta[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ などといった表記を用いるが, 簡略化した記法を用いることもある.

- 連続時間の正弦波 $x(t) = A\sin(\Omega t)$ を標本化周期 T_s で標本化して得られる信号の時刻 nT_s における値は $x[n] = x(nT_s) = A\sin(\Omega T_s n)$. ΩT_s を ω と書き, **正規化角周波数**と呼ぶ．単位は rad (ラジアン) である.
- Euler の公式 $e^{j\omega n} = \exp[j\omega n] = \cos(\omega n) + j\sin(\omega n)$ を思い出しておくこと．工学では虚数単位を j と表記することが多い.

離散時間信号の周期性

- 信号 $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ において, ある自然数 N が存在し, 任意の n に対して $x[n+N]=x[n]$ となっているものとする.
- このような信号を**周期的な信号**という.
- $P=\{N\in\mathbb{N}:\forall n, x[n+N]=x[n]\}$ とする ($\mathbb{N}$ は自然数全体の集合).

- 集合 P の最小限を，信号 $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ の基本周期あるいは周期という
- 教科書では，集合 P の要素を，すべて 信号 $(x[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ の周期と呼んでいる．
- 教科書 6 ページ 2 行目には最小の整数 N と書かれているが，最小の自然数 N の間違い．「最小の整数」では $-\infty$ になってしまう．

- 連続時間の正弦波は周期信号であるが, 正弦波を標本化周期 T_s で標本化した信号は, 正規化周波数 ω 次第で, 周期信号になることもあれば, ならないこともある.
- ある自然数 N が任意の n に対して $e^{j\omega(n+N)} = e^{j\omega n}$ を満たすための必要十分条件は, $e^{j\omega(n+N)} = e^{j\omega n}e^{j\omega N}$ だから, $e^{j\omega N} = 1$, すなわち $\omega N = 2m\pi$ である (m はある自然数).

- 負の周波数まで考えると, m を整数としておいた方が便利.
- これを踏まえると, 連続時間の正弦波を標本化した信号が周期的になるための必要十分条件は, $\dfrac{\omega N}{2\pi}$ が整数となることである. N は自然数だから, この条件は, $\dfrac{\omega}{2\pi}$ が有理数であることと等価.

- 正規化周波数の定義 $\omega = \Omega T_s$ に戻ると, 角周波数 Ω の連続時間正弦波を標本化周期 T_s で標本化した信号が周期的になるための必要十分条件は, $\dfrac{\Omega T_s}{2\pi}$ が有理数であること.
- 教科書では複素指数関数と余弦波に関して同一の説明を繰り返しているが, 冗長なので講義では略す.

ブロック線図によるシステム表現

- 教科書では, 信号に変換をもたらす過程をシステムと呼んでいる (p. 7)
- システム (一般的定義): 個々の要素が有機的に組み合わされた, まとまりをもつ体系 (大辞林第 2 版)
- この講義は教科書流の定義で進める.

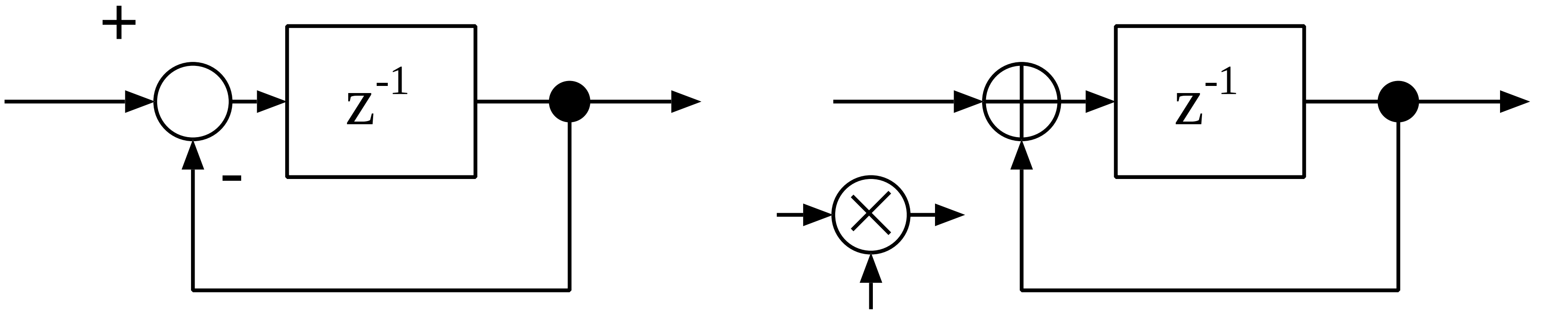
- 入力 $(u[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ を出力 $(y[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ に変換するシステムが与えられているとき, このシステムを矩形の箱で表現し, 入力を箱に入る矢印, 出力を箱から出る矢印で表記する図がよく用いられる．これをブロック線図という．教科書では英単語 block digram をカタカナ語にしたブロックダイアグラムという言葉が用いられているが, 一般的でない.

- ブロック線図を描画する際には, システムに対応する矩形の中に, そのシステムに対応する処理あるいはその数式 (典型的には伝達関数 (教科書 6 章)) を書くことが多い. たとえば, システムが遅延演算 (信号を時間軸に関し 1 だけ遅らせる) では, ブロックに z^{-1} を書く. z^{-1} という記号は z 変換に由来する (教科書 6 章)

- 複数の信号の加算には $\bigcirc$ という記号を用い, 加算の箇所に $+$ を, 減算の箇所に $-$ を付ける. $\oplus$ という記号を用いることもあるが国内では稀 (教科書はこの記号).
- 複数の信号の乗算には $\otimes$ という特別な記号が用いられる.
- 信号の定数倍が三角形の記号で表記されることがある.

- 信号の分岐箇所には●を書く.

簡単なブロック線図



線形時不変システム

- 一時的に, $(u[n])_{n\in\mathbb{Z}}$ を u と略記する.
- システム $\mathcal{F}[u]$ が $\mathcal{F}[a_1u_1+a_2u_2]=a_1\mathcal{F}[u_1]+a_2\mathcal{F}[u_2]$ を満たすとき, 線形システムという.
- 数式を使った説明がわかりにくい者は教科書 9 ページの図 1.13 を参照せよ.

- 初期時刻によってシステムの挙動が変わることがないシステムを時不変システムと呼ぶ.
- 教科書と表現は違うが, 言っていることは同じ.
- 線形時不変システムは, その解析および設計がしやすいという点において, 理論および応用の双方の観点から重要.