ディジタル制御 第 12 回

最小分散制御

最小分散制御とは

- 以下の１入力１出力システムを考える. $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ は入力, $(y(n))_{n\in\mathbb{N}}$ は出力, $U(z)$, $Y(z)$ はこれらの z 変換, $A_0(z)$ と $B_0(z)$ は既約な N 次と M 次の多項式, $N > M$, $A_0(z)$ はモニックとする.

$$Y(z) = \frac{B_0(z)}{A_0(z)} U(z).$$

- このシステムの**相対次数** (分母多項式と分子多項式の次数の差) は $N-M$ である．以下ではこれを ρ とおく ($\rho = N - M$).

- 以下では, 伝達関数を通過した信号の時間領域での解析が頻出する．これに対応するすべての式に逆 z 変換作用素を明記すると不必要に繁雑となるため, 次ページのような省略記法を導入する．

- $y(n) = \dfrac{B_0(z)}{A_0(z)} u(n)$ という式は, 以下の式が省略されたものと解釈する.

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{B_0(z)}{A_0(z)}\mathcal{Z}\left[(u(n))_{n\in\mathbb{N}}\right]\right]\Bigg|_{\text{時刻 } n \text{ で評価}}$$

独立変数が z^{-1} の場合も同様.

- 以下では, 離散時間システムの時間 (整数) を
をステップと呼ぶことがある.

- 最小分散制御が対象とするのは, 上記の出力に確率的な外乱 $\nu(n)$ が印加された, 以下のシステムである. ただし, $(\nu(n))_{n\in\mathbb{N}}$ は期待値零の白色雑音 ($k \neq l$ のとき $\nu(k)$ と $\nu(l)$ が確率的に独立) とする. 解きたい問題は, 目標値 $(r(n))_{n\in\mathbb{N}}$ への追従問題である.

$$y(n) = \frac{B_0(z)}{A_0(z)}u(n) + \frac{C_0(z)}{A_0(z)}\nu(n).$$

- 外乱 $\nu(n)$ が存在するため, $y(n)$ を $r(n)$ に完全に一致させることはできない. 最小分散制御とは, ρ ステップ未来の出力 $y(n+\rho)$ と目標値との偏差

$$y(n+\rho) - r(n+\rho)$$

の分散を最小にする制御方式である.

- ρ ステップの遅延を許容する理由を見るために, 伝達関数の独立変数を z から z^{-1} に変える. 当面, 外乱 $\nu(n)$ の項は無視する.

- $A_0(z)$, $B_0(z)$ が以下のようになっていたものとする.

$$A_0(z) = z^N + \alpha_1 z^{N-1} + \cdots + \alpha_N$$

$$B_0(z) = \beta_{N-M} z^M + \cdots + \beta_N$$

- $A_0(z)Y(z) = B_0(z)U(z)$ は, 以下のように書ける.

$$\left(z^N + \alpha_1 z^{N-1} + \cdots + \alpha_N\right) y(n) \\ = \left(\beta_{N-M} z^M + \cdots + \beta_N\right) u(n)$$

である.

- 前ページの式の両辺に z^{-N} を乗ずると, 以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\alpha_1 z^{-1}+\cdots+\alpha_N z^{-N}\right) y(n) \\
&= z^{-(N-M)}\left(\beta_{N-M}+\cdots+\beta_N z^{-M}\right) u(n) \\
&= z^{-\rho}\left(\beta_{N-M}+\cdots+\beta_N z^{-M}\right) u(n)
\end{aligned}
$$

- 現時点までの入力の線形結合がρステップ経過後に現時点までの出力の線形結合に影響を及ぼす形になっている．このため，ρステップの遅延は不可避.

- z^{-1} を独立変数とする記法で改めて問題設定をする.

$$
\begin{aligned}
A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \cdots a_N z^{-N} \\
B(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M} \\
C(z^{-1}) &= 1 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_L z^{-L}
\end{aligned}
$$

とおく. ただし, $b_0 \neq 0$ とする.

- 以下の制御系を考える.

  ▷ 外乱がない場合

$$y(n) = z^{-\rho}\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(n)$$

  ▷ 外乱がある場合

$$y(n) = z^{-\rho}\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(n) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}\nu(n)$$

- 最小分散制御は, 既に述べたように, 外乱がある場合に $y(n+\rho)$ と $r(n+\rho)$ の偏差の分散を最小にする制御方式であるが, これは, 外乱がない場合に $y(n+\rho) = r(n+\rho)$ とするモデル追従制御系 (第 11 回) を, 外乱がある場合向けに拡張したものになっている.

独立変数を z^{-1} にするときの注意点

- $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ は単体で 因果的なフィルタになっている.

- $B(z^{-1}) = \dfrac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_M}{z^M}$ だから, $B(z^{-1})$ の極は原点で, $B(z^{-1})$ の零点は $b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_M$ の零点である.

- $\dfrac{1}{A(z^{-1})} = \dfrac{z^N}{z^N + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_N}$ だから，$A(z^{-1})$ の極は $z^M + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N$ の零点で，$A(z^{-1})$ の零点は原点．

- $z^{-\rho}\dfrac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \dfrac{B(z^{-1})}{z^{\rho}A(z^{-1})}$ は, $\rho \geq 0$ であれば因果的で, $A(z^{-1})$ と $B(z^{-1})$ の次数は因果性とは無関係.

Diophantine 方程式

- $A_1(z)$ と $A_2(z)$ の最大公約多項式 $D(z)$ に対して，

$$A_1(z)X_1(z) + A_2(z)X_2(z) = D(z) \qquad (\bigstar)$$

となる多項式 $(X_1(z), X_2(z))$ が存在し，それを Euclid の互除法で求めることができることは第 7 回で述べた．

- (★) を **Diophantine 方程式**, **Bezout 等式**などと呼ぶ. (★) は無数に解を持ち, Euclid の互除法はそのひとつの解を与える.

- 今回の講義で用いるのは，$A_1(z) = A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}$，$A_2(z) = z^{-\rho}$ という z^{-1} の多項式に関する Diophantine 方程式の解．ただし，$\rho \geq 1$ とする．

- この問題の独立変数は z^{-1} であるが, $z^{-1} = t$ のように変数変換すれば通常の多項式になる. 多項式の除算はこの変数変換の後に実行されると考えてよい.

- $A(z^{-1})$ と $z^{-\rho}$ は互いに疎なので, Eulid の互除法によって, $A(z^{-1})X_1(z^{-1})+z^{-\rho}X_2(z^{-1}) = 1$ を満たす多項式 $(X_1(z^{-1}), X_2(z^{-1}))$ を求めることができるが…

- この問題では, $A_2(z^{-\rho})$ が特別な形になっているので, もっと簡単に $(X_1(z^{-1}), X_2(z^{-1}))$ を求めることができる.

- $X_1(z^{-1}) = p_0 + p_1 z^{-1} + \cdots + p_{\rho-1} z^{-(\rho-1)}$, $X_2(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots + q_{N-1} z^{-(N-1)}$ を $\rho - 1$ 次および $N - 1$ 次の多項式とする.

- $A(z^{-1})X_1(z^{-1})+z^{-\rho}X_2(z^{-1})$ の係数は, 次ページの行列とベクトルの積によって得られる.

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & & & & & \\
a_1 & \ddots & & & & \\
\vdots & \ddots & 1 & & & \\
\hline
\vdots & \ddots & a_1 & 1 & & \\
a_N & \ddots & \vdots & & \ddots & \\
 & \ddots & \vdots & & & \ddots \\
 & & a_N & & & 1
\end{array}\right)
\begin{pmatrix}
p_0 \\ \vdots \\ p_{\rho-1} \\ q_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_{N-1}
\end{pmatrix}
$$

前ページの式で, 前半の行列は $N+\rho$ 行 ρ 列, 後半の行列は $N+\rho$ 行 N 列である. 空白部分は零である.

- 前ページの行列を $\boldsymbol{M}$, ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする. また, $N+\rho-1$ 次の多項式 $Y(z^{-1}) = y_0 + y_1 z^{-1} + \cdots + y_{N+\rho-1} z^{-(n+\rho-1)}$ に対し, この多項式の係数を低次から順に並べた列ベクトルを $\boldsymbol{y}$ とする.

- 行列 $\boldsymbol{M}$ は正則な正方行列なので, $\boldsymbol{y}$ が与えられているとき, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ について解くことができる.

- $N+\rho-1$ 次以下の任意の多項式 $Y(z^{-1})$ に対し, 上記の解 $\boldsymbol{x}$ の前半の ρ 個の成分を $X_1(z^{-1})$ の係数, 後半の $N-\rho$ 個の成分を $X_2(z^{-1})$ の係数とすることで,

$$A(z^{-1})X_1(z^{-1}) + z^{-\rho}X_2(z^{-1}) = Y(z)$$

を満たす 多項式 $(X_1(z^{-1}), X_2(z^{-1}))$ を求めることができる. $\deg X_1(z^{-1}) \leq \rho - 1$, $\deg X_2(z^{-1}) \leq N - 1$ である.

- $\deg Y(z^{-1}) = L$ とする．上記によって $L \leq N+\rho-1$ の場合の $Y(z^{-1})$ の表現が得られている．$\gcd(A(z^{-1}), z^{-\rho}) = 1$ なので, 上記において $L = 0$ とした場合が Euclid の互除法で $\gcd(A(z^{-1}), z^{-\rho})$ を求めることに相当する．

- $L \geq N+\rho$ の場合は,

$$Y(z^{-1}) = Y_L(z^{-1}) + z^{-(N+\rho)} Y_U(z^{-1})$$

のように $N+\rho-1$ 次以下の部分とそれ以外に分け, 後者から $z^{-(N+\rho)}$ の項を括り出す $(\deg Y_U(z^{-1}) = L - N - \rho)$.

$(X_1(z^{-1}), X_A(z^{-1}))$ を

$$A(z^{-1})X_1(z^{-1}) + z^{-\rho}X_A(z^{-1}) = Y_1(z)$$

の解とし, $X_B(z^{-1}) = z^{-N}Y_U(z^{-1})$ とする. $X_2(z^{-1}) = X_A(z^{-1}) + X_B(z^{-1})$ とおくと, 先と同様に, 次式が得られる.

$$A(z^{-1})X_1(z^{-1}) + z^{-\rho}X_2(z^{-1}) = Y(z^{-1})$$

この場合, $\deg X_2(z) = L - \rho$ である.

- まとめると, N 次の多項式 $A(z^{-1})$ と多項式 $z^{-\rho}$ $(\rho \geq 1)$ が与えられているとき, 任意の L 次の多項式 $Y(z^{-1})$ に対し, $\rho - 1$ 次以下の多項式 $X_1(z^{-1})$ と $\max\{N-1, L-\rho\}$ 次以下の多項式 $X_2(z^{-1})$ が存在し,

$$A(z^{-1})X_1(z^{-1}) + z^{-\rho}X_2(z^{-1}) = Y(z)$$

となる.

モデル追従制御の別表現

- 以下の制御対象を考える．

$$y(n) = z^{-\rho}\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(n)$$

ただし，$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots a_N z^{-N}$, $B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}$ で, $\rho \geq 1$, $b_0 \neq 0$ とする．

- 出力 $y(n)$ を目標値 $r(n)$ に一致させることが制御の目的である．この問題を，第 7 回で極配置を使った時と同じ方針:

  1. $y(n+\rho)$ を過去の入力の系列とと出力の系列の線形結合で表現
  2. $y(n+\rho) = r(n+\rho)$ となる補償器を構成

  で解く．

- $y(n+\rho)$ の表現を得るために, 極配置ではなく Diophantine 方程式の 上述の方法による解 $(F(z^{-1}), G(z^{-1}))$ を用いる:

$$A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-\rho}G(z^{-1}) = 1.$$

$A(z^{-1})$ と $z^{-\rho}$ は互いに疎だから上記は解を持ち, $\deg F(z^{-1}) \leq \rho - 1$, $\deg G(z^{-1}) \leq N - 1$ である.

- $z^{-\rho}B(z^{-1})u(n) = A(z^{-1})y(n)$ の両辺に $F(z^{-1})$ を乗ずると (式の左右の入れ換えに注意),

$$z^{-\rho}F(z^{-1})B(z^{-1})u(n) = F(z^{-1})A(z^{-1})y(n)$$
$$= \left(1 - z^{-\rho}G(z^{-1})\right)y(n)$$

より, $z^{\rho}y(n) = y(n+\rho)$ に注意して,

$$y(n+\rho) = G(z^{-1})y(n) + F(z^{-1})B(z^{-1})u(n). \qquad (\bigstar)$$

- (★) を, 現在および過去の入力と出力の系列から ρ ステップ先の出力を計算しているという意味で, ρ ステップ予測器と呼ぶ. 第 7 回に極配置で求めたのと同じ形ではあるが, 解釈が異なる.

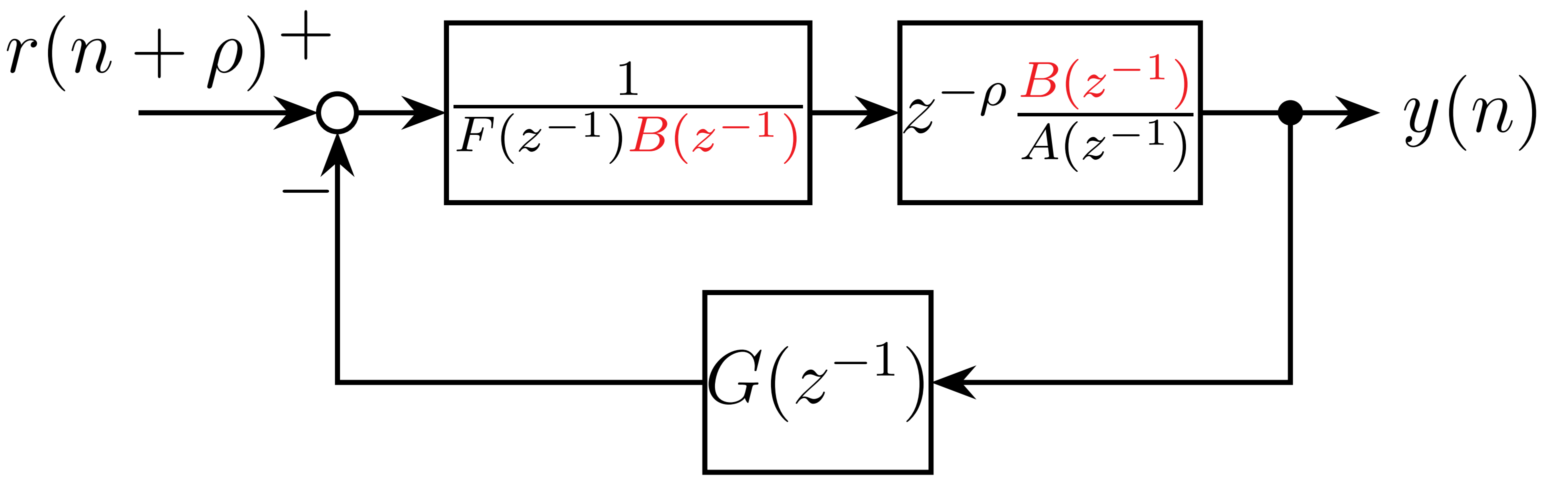
- ρ ステップ予測器を使って $y(n+\rho) = r(n+\rho)$ とするための補償器を求めると, 以下のようになる.

$$u(n) = \frac{1}{F(z^{-1})B(z^{-1})} \left(r(n+\rho) - G(z^{-1})y(n) \right). \tag{☆}$$

- 上記によって $y(n+\rho) = r(n+\rho)$ となることが 代入により確認できる.

- 今述べた方法は, 第 7 回で述べた極配置による方法の別解であるが, 第 7 回の方法で述べられた伝達関数の零点が安定という条件が見掛け上はなくなっている．しかし, これはあくまで見掛け上であり, 実際には零点の安定性も必要．これから述べるように, ブロック線図を描画すると, 零点の安定性がどこで必要になるかがわかる．

- ブロック線図を描画すると, 以下のようになる.



- 閉ループ伝達関数は $z^{-\rho}$ となり安定であるが, $B(z^{-1})$ に関して極零相殺が発生している. したがって, この手法た適用できるのは, $B(z^{-1})$ が安定多項式である場合に限られる. この制限も, 極配置を使ってこの問題を解いた場合と同じ.

最小分散制御

- 以下の制御対象を考える.

$$y(n) = z^{-\rho}\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(n) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}\nu(n)$$

ただし, $A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots a_N z^{-N}$, $B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}$, $C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_L z^{-L}$ で, $\rho \geq 1$, $b_0 \neq 0$ とする. $C(z^{-1})$ は安定と仮定する.

- $(\nu(n))_{n\in\mathbb{N}}$ は期待値零の白色雑音 ($k \neq l$ のとき $\nu(k)$ と $\nu(l)$ が確率的に独立), その分散は時刻によらず σ^2 であるものとする．解きたい問題は, 目標値への追従問題である.

- 外乱がない場合と同様に, ρ ステップ予測器を構成し, 予測値が目標値と一致するような制御をおこなうのであるが, ρ ステップ予測器の構成は外乱がない場合と異なる.

- $F(z^{-1})$ と $G(z^{-1})$ を以下の方程式の解とする. ただし, $\deg F(z^{-1}) \le \rho - 1$, $\deg G(z^{-1}) \le \max\{N-1, L-\rho\}$ である.

$$A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-\rho}G(z^{-1}) = C(z^{-1})$$

- 時刻 n における $y(n+\rho)$ の推定値を $\hat{y}(n+\rho|n)$ と書く．外乱 $\nu(n),\ldots$ の値は未知なので，推定時には零とする．

- 外乱がない場合と同様に ρ ステップ予測器の式を導く.

- 制御対象の伝達関数の両辺に $A(z^{-1})$ を掛けると, 次式が得られる.

$$A(z^{-1})y(n) = z^{-\rho}B(z^{-1})u(n) + C(z^{-1})\nu(n)$$

- この両辺に $F(z^{-1})$ を掛けると，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&F(z^{-1})A(z^{-1})y(n) \\
&= z^{-\rho}F(z^{-1})B(z^{-1})u(n) \\
&\qquad + F(z^{-1})C(z^{-1})\nu(n).
\end{aligned} \tag{$\star$}
$$

- 一方,

$$A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-\rho}G(z^{-1}) = C(z^{-1})$$

だったから,

$$\begin{aligned} &F(z^{-1})A(z^{-1})y(n) \\ &\qquad = \left(C(z^{-1}) - z^{-\rho}G(z^{-1})\right)y(n) \quad (\bigstar) \end{aligned}$$

である.

- (☆) と (★) をまとめると,

$$\left(C(z^{-1}) - z^{-\rho}G(z^{-1})\right) y(n)$$
$$= z^{-\rho}F(z^{-1})B(z^{-1})u(n) + F(z^{-1})C(z^{-1})\nu(n)$$

となる.

- 前ページの式の両辺に z^ρ を乗じることで, 次式が得られる.

$$
\left(C(z^{-1})z^\rho - G(z^{-1})\right) y(n)
$$
$$
= F(z^{-1})B(z^{-1})u(n) + F(z^{-1})C(z^{-1})z^\rho \nu(n)
$$

- したがって,

$$
\begin{aligned}
C(z^{-1})y(n+\rho) = {} & F(z^{-1})B(z^{-1})u(n) \\
& + G(z^{-1})y(n) + F(z^{-1})C(z^{-1})\nu(n+\rho)
\end{aligned}
$$

である.

- よって,

$$y(n+\rho) = \frac{F(z^{-1})B(z^{-1})}{C(z^{-1})}u(n) + \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(n)$$

$$+ F(z^{-1}) \quad \underbrace{\nu(n+\rho)}_{\text{推定時には零とする}}$$

であるが…

- $y(n+\rho)$ を推定するときには $\nu(n+\rho)$ の推定値を零とするので,

$$\hat{y}(n+\rho|n) = \frac{F(z^{-1})B(z^{-1})}{C(z^{-1})}u(n) + \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(n)$$

となる.

- 以上によって導出された ρ ステップ予測器 の開ループの フィルタとしての性質を調べる.

- $\varepsilon(n+\rho) = y(n+\rho) - \hat{y}(n+\rho|n)$ とする．前ページの式より，

$$\varepsilon(n+\rho) = F(z^{-1})\nu(n+\rho)$$

である．

- 期待値を取る演算を $\mathrm{E}[\cdot]$, 分散を求める演算を $\mathrm{Var}[\cdot]$ とする.

- $F(z^{-1})$ は $\rho - 1$ 次以下の多項式なので,

$$F(z^{-1}) = f_0 + \cdots + f_{\rho-1} z^{-(\rho-1)}$$

という形になっている．よって,

$$\begin{aligned}\varepsilon(n+\rho) &= F(z^{-1})\nu(n+\rho)\\ &= f_0\nu(n+\rho) + \cdots + f_{\rho-1}\nu(n+1)\end{aligned}$$

である．

- 前ページの式の両辺に期待値演算子 $\mathrm{E}[\cdot]$ を作用させると, $\nu(n)$ の期待値は零なので,

$$\mathrm{E}[\varepsilon(n+\rho)] = 0$$

となる.

- よって,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}[\varepsilon(n+\rho)] \\
&\quad = \mathrm{E}\big[\big(\varepsilon(n+\rho) - \mathrm{E}[\varepsilon(n+\rho)]\big)^2\big] \\
&\quad = \mathrm{E}\big[\big(\varepsilon(n+\rho)\big)^2\big] \\
&\quad = \sum_{k,l=0}^{\rho-1} f_k f_l \mathrm{E}[\nu(n+\rho-k)\nu(n+\rho-l)]
\end{aligned}
$$

- 前ページの式において, $k \neq l$ なら $\nu(n+\rho-k)$ と $\nu(n+\rho-l)$ は独立で, 期待値は零だから, $k \neq l$ の項は消える.

- 各 k に対して $\nu(n+\rho-k)$ の分散は σ^2 だから, $\mathrm{Var}[\varepsilon(n+\rho)]$ は, 次式のように簡略化される.

$$\mathrm{Var}[\varepsilon(n+\rho)] = \left(\sum_{k=0}^{\rho-1} f_k^2\right)\sigma^2$$

- $A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-\rho}G(z^{-1}) = 1$ のかわりに $A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-\rho}G(z^{-1}) = C(z^{-1})$ の解を用いるのは, $\hat{y}(n+\rho|n)$ と $F(z^{-1})\nu(n+\rho)$ が確率的に独立となるようにするため,

- 続いて, 最小分散制御の制御則を導出する.

- まず, $y(n+\rho)=\hat{y}(n+\rho|n)+F(z^{-1})\nu(n+\rho)$ と書けることに注意する. $\mathrm{E}[y(n{+}\rho)]=r(n{+}\rho)$ となるような制御入力の中で, $y(n+\rho)-r(n+\rho)$ の分散を最小化するものを求めたい. 分散を計算すると…

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}[y(n+\rho) - r(n+\rho)] \\
&= \mathrm{E}\left[\left(y(n+\rho) - r(n+\rho)\right)^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\Big((\hat{y}(n+\rho|n) - r(n+\rho)) + F(z^{-1})\nu(n+\rho)\Big)^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\hat{y}(n+\rho|n) - r(n+\rho)\right)^2\right] \\
&\quad + \mathrm{E}\left[\left(\hat{y}(n+\rho|n) - r(n+\rho)\right) F(z^{-1})\nu(n+\rho)\right] \\
&\quad + \mathrm{E}\left[\left(F(z^{-1})\nu(n+\rho)\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

- $\hat{y}(n+\rho|n) - r(n+\rho)$ が過去の外乱に依存するのに対し, $F(z^{-1})\nu(n+\rho)$ は未来の外乱 $\nu(n+1), \ldots, \nu(n+\rho)$ に依存するから, $\hat{y}(n+\rho|n) - r(n+\rho)$ と $F(z^{-1})\nu(n+\rho)$ は確率的に独立. したがって

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\left(\hat{y}(n+\rho|n) - r(n+\rho)\right) F(z^{-1})\nu(n+\rho)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\hat{y}(n+\rho|n) - r(n+\rho)\right)\right] \mathrm{E}\left[F(z^{-1})\nu(n+\rho)\right] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

- $\left[(F(z^{-1})\nu(n+\rho))^2 \right]$ は入力とは無関係.
- よって,

$$\mathrm{E}\left[(\hat{y}(n+\rho|n) - r(n+\rho))^2 \right]$$

を最小化すればよい.

- ρ ステップ予測器を変更したのは, この形になるようにするため. $\hat{y}(n+\rho|n)$ は現在および過去の外乱 $\nu(n), \nu(n-1), \ldots$ の影響の影響を受けているため, 上記のようにしないと, 上述の各項を分けて扱うことができなくなる.

- $\hat{y}(n+\rho|n)$ は

$$\hat{y}(n+\rho|n) = \frac{F(z^{-1})B(z^{-1})}{C(z^{-1})}u(n) + \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(n)$$

によって与えられていた.

- よって,

$$u(n) = \frac{1}{F(z^{-1})B(z^{-1})}\Big(-G(z^{-1})y(n) \\ + C(z^{-1})r(n)\Big)$$

とすると, $\mathrm{E}\left[\left(\hat{y}(n+\rho|n) - r(n+\rho)\right)^2\right]$ から $y(n)$ の影響を除去することができる. これが最小分散制御の制御入力である.

- 最小分散制御により $y(n+\rho)$ がどうなるかを確認する.

$$y(n+\rho) = \frac{F(z^{-1})B(z^{-1})}{C(z^{-1})}u(n) + \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(n) + F(z^{-1})\nu(n+\rho)$$

に $u(n)$ を代入すると, 次式が得られる.

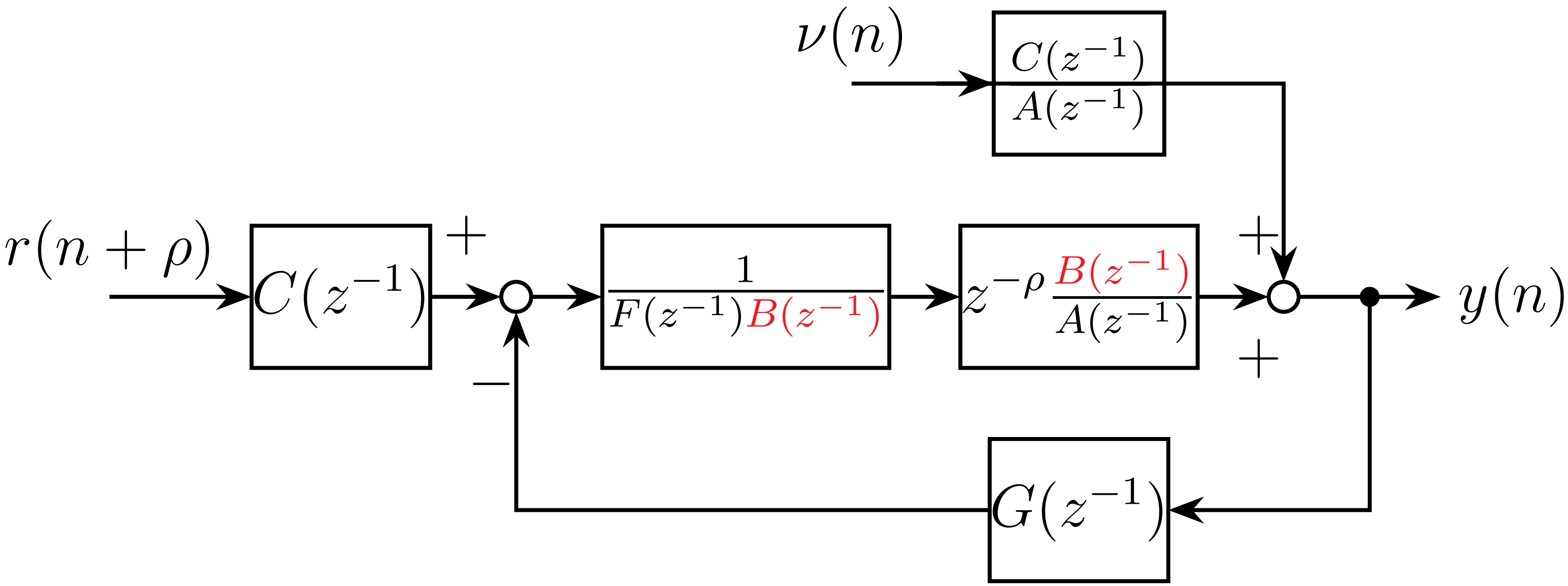
$$y(n+\rho) = r(n+\rho) + F(z^{-1})\nu(n+\rho)$$

- $\nu(n+k)$ は任意の k に対して期待値零と仮定したから，

$$\mathrm{E}\left[y(n+\rho)-r(n+\rho)\right]=0$$

となっていることがわかる．

- ブロック線図は以下の通り．



- 最小分散制御が外乱がない場合の目標値追従制御と異なる点は, 目標値を $C(z^{-1})$ というフィルタに通す必要があるという点である.

- $B(z^{-1})$ が極零相殺されている構造は外乱がない場合と同じ. したがって, こちらも $B(z^{-1})$ が安定である場合にのみ使える.

- 図中のフィードバックループの極を確認する．この部分は，$z^{-\rho}\dfrac{1}{A(z^{-1})F(z^{-1})}$ と $G(z^{-1})$ のフィードバック結合になるから…

- 閉ループ伝達関数は…

$$
\frac{z^{-\rho}\frac{1}{A(z^{-1})F(z^{-1})}}{1+z^{-\rho}\frac{G(z^{-1})}{A(z^{-1})F(z^{-1})}} = \frac{z^{-\rho}}{A(z^{-1})F(z^{-1})+z^{-\rho}G(z^{-1})}
$$

$$
= \frac{z^{-\rho}}{C(z^{-1})}.
$$

- 極は原点および $C(z^{-1})$ の零点に配置されている．よって，$C(z^{-1})$ が安定であると仮定しないと，この部分の安定性は保証されない．

一般化最小分散制御

- $B(z^{-1})$ が安定でなければならないという 最小分散制御 の欠点を克服するために, **一般化最小分散制御**という手法が用いられる．これは, 評価関数を $\mathrm{E}\left[(y(n+\rho)-r(n+\rho))^2\right]$ から変更することで, $B(z^{-1})$ の極零相殺が発生しないようにする方法である.

- 最小分散制御について論じたときと同様に, 以下の制御対象を考える.

$$y(n) = z^{-\rho}\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(n) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}\nu(n)$$

$A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ および $\nu(n)$ に関する条件も先ほどと同一である.

- 評価関数を以下の J に変更する.

$$
\begin{aligned}
J &= \mathrm{E}\left[(\phi(n+\rho))^2\right] \\
\phi(n+\rho) &= P(z^{-1})y(n+\rho) + S(z^{-1})u(n) \\
&\quad - R(z^{-1})r(n+\rho)
\end{aligned}
$$

$P(z^{-1})$, $S(z^{-1})$, $R(z^{-1})$ は設計者が設定する多項式で, $P(z^{-1}) = R(z^{-1}) = 1$, $S(z^{-1}) = 0$ とすると最小分散制御になる. ただし, $P(z^{-1})$ と $S(z^{-1})$ の選び方には注意が必要 (後述).

- ρステップ予測器も変更する: $F(z^{-1})$ と $G(z^{-1})$ には, 以下の方程式の解を用いる.

$$A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-\rho}G(z^{-1}) = C(z^{-1})P(z^{-1}).$$

ただし, $\deg F(z^{-1}) \leq \rho - 1$, $\deg G(z^{-1}) \leq \max\{N-1, L + \deg P(z^{-1}) - \rho\}$ である. 右辺の取り方を変える理由は, 先ほどと同様に, 評価関数において外乱を明示的に含む項とそれ以外を確率的に独立にするため.

- 先と同様に, ρ ステップ予測器の導出の計算をおこなう.

$$
\begin{aligned}
&F(z^{-1})A(z^{-1})y(n) \\
&= z^{-\rho}F(z^{-1})B(z^{-1})u(n) + F(z^{-1})C(z^{-1})\nu(n) \\
&= \left(P(z^{-1})C(z^{-1}) - z^{-\rho}G(z^{-1})\right) y(n).
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
P(z^{-1})C(z^{-1})y(n+\rho) &= F(z^{-1})B(z^{-1})u(n) \\
&\quad + G(z^{-1})y(n) + F(z^{-1})C(z^{-1})\nu(n+\rho).
\end{aligned}
$$

両辺を $C(z^{-1})$ で割って, 次式を得る.

$$P(z^{-1})y(n+\rho) = \frac{F(z^{-1})B(z^{-1})}{C(z^{-1})}u(n) + \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(n) + F(z^{-1})\nu(n+\rho)$$

- 以上が 一般化最小分散制御のための ρ ステップ予測器の式である.

- これを $\phi(n+\rho)$ に代入すると…

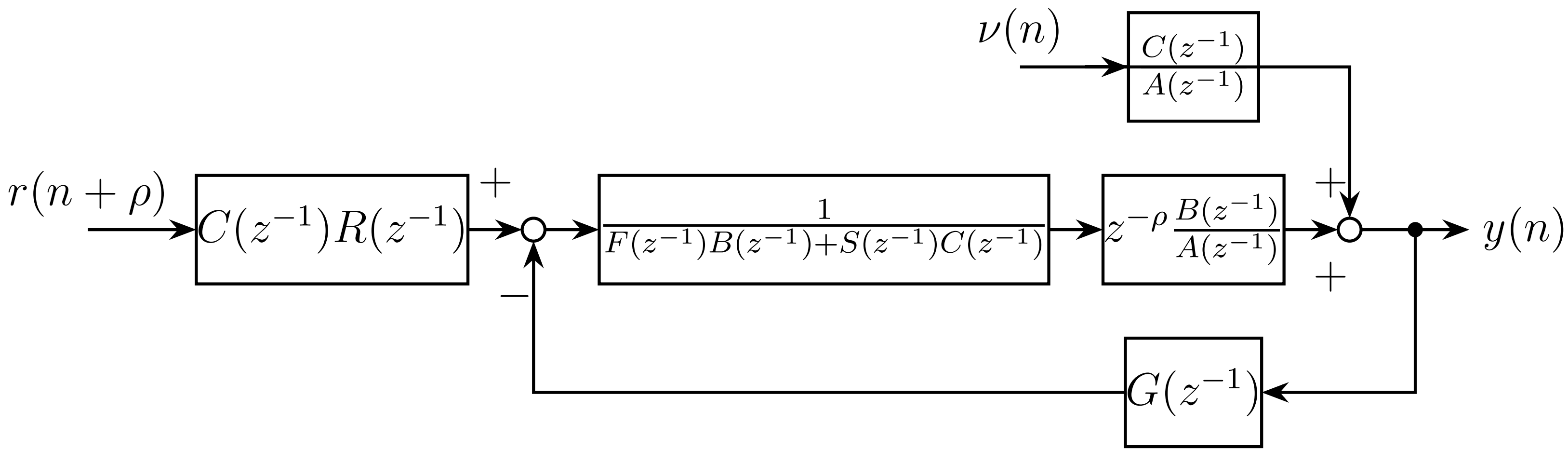
$$
\begin{aligned}
\phi(n+\rho) = \frac{1}{C(z^{-1})}\Big(& G(z^{-1})y(n) \\
& - C(z^{-1})R(z^{-1})r(n+\rho) \\
& + \left(F(z^{-1})B(z^{-1}) + S(z^{-1})C(z^{-1})\right) u(n)\Big) \\
& + {\color{red} F(z^{-1})\nu(n+\rho)}
\end{aligned}
$$

- 前ページ右辺の最終項はそれ以外と確率的に独立だから, $\phi(n+\rho)$ の最終項を除く項以外が零となるように $u(n)$ を定めることで, その分散を小さくすることができる．これが一般化最小分散制御の制御則である．

- 一般化最小分散制御の制御則を書き下すと，次のようになる．

$$u(n) = \frac{1}{F(z^{-1})B(z^{-1}) + S(z^{-1})C(z^{-1})} \cdot \Big(C(z^{-1})R(z^{-1})r(n+\rho) - G(z^{-1})y(n)\Big)$$

- 一般化最小分散制御のブロック線図は最小分散制御とほぼ同様だが, $B(z^{-1})$ に関する直接的な極零相殺が発生しないことが相異点.



一般化最小分散制御のブロック線図

- 一般化最小分散制御の閉ループ伝達関数は次の通り.

$$\frac{\dfrac{z^{-\rho}B(z^{-1})}{A(z^{-1})(F(z^{-1})B(z^{-1})+S(z^{-1})C(z^{-1}))}}{1+\dfrac{z^{-\rho}B(z^{-1})G(z^{-1})}{A(z^{-1})(F(z^{-1})B(z^{-1})+S(z^{-1})C(z^{-1}))}}$$

- 繁雑なので,

$$
\begin{aligned}
&D_{\mathrm{GMV}}(z^{-1})\\
&= A(z^{-1})\big(F(z^{-1})B(z^{-1}) + S(z^{-1})C(z^{-1})\big)\\
&+ z^{-\rho}G(z^{-1})B(z^{-1})
\end{aligned}
$$

とおく.

- 上記を用いると, 閉ループ伝達関数を

$$\frac{z^{-\rho}B(z^{-1})}{D_{\mathrm{GMV}}(z^{-1})}$$

と書き直せる.

- $F(z^{-1})$ と $G(z^{-1})$ は

$$A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-\rho}G(z^{-1}) = P(z^{-1})C(z^{-1})$$

となるように選ばれていたが, $D_{\mathrm{GMV}}(z^{-1})$ にこれを代入すると…

$$
\begin{aligned}
&D_{\mathrm{GMV}}(z^{-1}) \\
&= (A(z^{-1})F(z^{-1})B(z^{-1}) + A(z^{-1})S(z^{-1})C(z^{-1}) \\
&\quad + z^{-\rho}G(z^{-1})B(z^{-1}) \\
&= B(z^{-1})P(z^{-1})C(z^{-1}) + A(z^{-1})S(z^{-1})C(z^{-1}) \\
&= C(z^{-1})\Bigg(B(z^{-1})P(z^{-1}) + A(z^{-1})S(z^{-1})\Bigg).
\end{aligned}
$$

- よって, 閉ループ伝達関数は,

$$\frac{z^{-\rho}B(z^{-1})}{C(z^{-1})\left(B(z^{-1})P(z^{-1})+A(z^{-1})S(z^{-1})\right)}$$

となっている.

- 閉ループ極は原点および

$$C(z^{-1})\left(B(z^{-1})P(z^{-1}) + A(z^{-1})S(z^{-1})\right).$$

の零点に配置される.

- したがって, 一般化最小分散制御を用いる際には,

  - $\triangleright$ $C(z^{-1})$ が安定であると仮定する
  - $\triangleright$ $P(z^{-1})B(z^{-1}) + A(z^{-1})S(z^{-1})$ が安定となるように $P(z^{-1})$ および $S(z^{-1})$ を選ぶ

  ことが必要となる.

セルフチューニングコントロール

- 最小分散制御や一般化最小分散制御に 制御対象の伝達関数の係数を推定する機構を組み合わせたものをセルフチューニングコントロールと呼ぶ．これは, モデル追従制御系にパラメータ推定機構を組み合わせた適応制御の確率系版である．

- 適応制御とセルフチューニングコントロールのいずれも, 過去の入力および出力の系列を保存しておき, これに目標値を加えたものと伝達関数の係数に対応するパラメータの線形結合で 入力を表現した上で, 最小 2 乗法などに由来するアルゴリズムでパラメータを推定する. 安定性解析は繁雑である. 詳細は文献に委ねる.

参考文献

- 森, 演習で学ぶディジタル制御, 森北出版, 2012.
- 宮里, 適応制御, コロナ社, 2018.
- 古田, ディジタルコントロール, コロナ社, 1989.
- K. J. Åström and B. Wittenmark, Computer-controlled systems, Prentice-Hall, 1997.