ディジタル制御 第 11 回

離散時間サーボ系

サーボ系とは

- 制御対象の出力を所与の目標値 (目標信号, 参照出力などとも呼ぶ) に追従させるような制御系を, サーボ系あるいはサーボ機構と呼ぶ.

- 目標値への追従は, 多くの場合は漸近的である (追従誤差が時間とともに零に収束するという意味).

- サーボ系には, 特定の波形の目標値を想定して設計されるものと, 一定の条件を満たすフィルタによって任意波形を濾波したものを目標値とするものがある.

- 実用上は, 区分的に定数の目標値に対するサーボ系が よく用いられる. 目標値への収束が十分速ければ, このサーボ系により, 時間とともに緩やかに変動する目標値への追従も可能.

- サーボ系にとって望ましい特性は以下の通り(必ずしもすべてが達成できるわけではない).
  - ▷ 外乱等がない理想的な状態で 目標値への誤差のない追従を達成する.
  - ▷ 目標値への収束が速い.
  - ▷ 制御系を内部安定にする.
  - ▷ 外乱等の介在下で誤差のない (少ない) 目標値への追従を達成する.

- サーボ系の構成法にはは様々なものがある. 最適制御を用いないものと, 用いるものがあるが, 今回の講義では最適制御を用いないものを紹介する.

PID 制御によるサーボ系

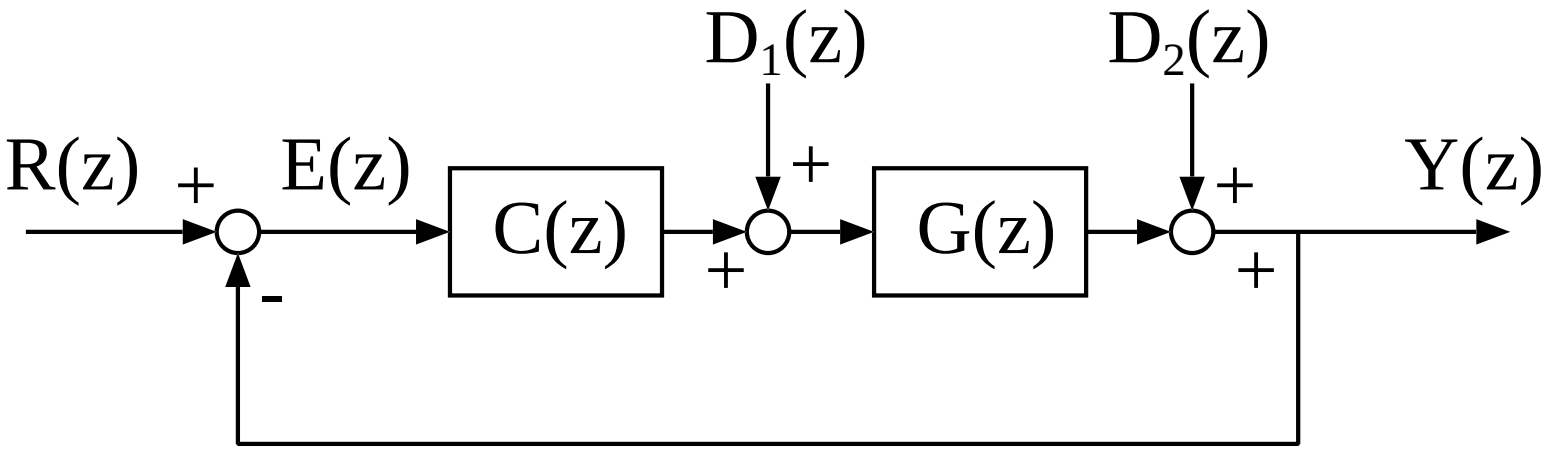
- すでに述べた PID 制御は, サーボ系の構成にも, そのままの形で用いられる.
- サーボ系特有の構成法などはないので, これ以上は説明しない.

感度関数

- 後の説明の都合で, ここで感度関数について述べておく.
- 以下しばらく, すべての信号がすでに z 変換されていることを前提とする.

- 制御対象の出力 $Y(z)$ を参照入力 $R(z)$ に追従させるために, ユニティフィードバックシステムが構成されているものとする.

- $E(z) = R(z) - Y(z)$ とおき, 補償器を $C(z)$ とする.
- 制御対象の入力側と出力側に, 外乱 $D_1(z)$ および $D_2(z)$ が 加えられているものとする.



- 当面の興味の対象は 追従誤差 $R(z) - Y(z)$ なので, これに関する伝達関数を作ると, 次ページのようになる.

$$
\begin{aligned}
E(z) = & \frac{1}{1+G(z)C(z)}R(z) \\
& - \frac{G(z)}{1+G(z)C(z)}D_1(z) \\
& - \frac{1}{1+G(z)C(z)}D_2(z)
\end{aligned}
$$

- 前ページの式から, 外乱がない場合には, 追従誤差 $E(z)$ は, $R(z)$ に

$$S(z) = \frac{1}{1 + G(z)C(z)}$$

を乗じることで得られることがわかる.

- $S(z)$ をこのフィードバックシステムの感度関数と呼ぶ.
- 感度関数は, 外乱 $D_2(z)$ に対する 追従誤差 $E(z)$ の応答にもなっている.

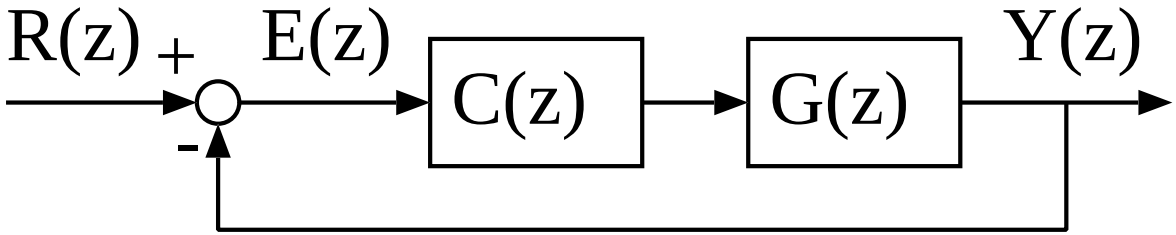
感度関数とサーボ系

- 目標値 $(r(n))_{n\in\mathbb{N}}$ は因果的で, その z 変換が

$$\frac{P(z)}{(z-1)^k}$$

であるものとする.

- 補償器 $C(z)$ を含むユニティーフィードバック系を考える.



- 以下では, フィードバック系が well-posed であることと, 目標値が因果的であることは当然の仮定とし, 一々断らない. また, 伝達関数を有理式で表現したとき, その分母と分子は既約になっているものとする.

- $E(z) = R(z) - Y(z)$ とおく. 既に述べたように, 感度関数

$$S(z) = \frac{1}{1 + G(z)C(z)}$$

を用いると,

$$E(z) = S(z)R(z)$$

となる.

- $n \geq 0$ に対し,

$$G(z)C(z) = \frac{N(z)}{(z-1)^n D(z)}$$

となっていて, $N(z)$ および $D(z)$ は $(z-1)$ と互いに疎であるものとする. このようなフィードバック系を n 型のフィードバック系と呼んだ.

- n 型のフィードバック系で z 変換の最終値定理が適用可能で $k \leq n$ であれば, $D(1) \neq 0$, $N(1) \neq 0$ だから, 以下に示す通り,

$$\lim_{n \to \infty} e(n) = 0$$

である. よって, このフィードバックシステムは, 目標値 $R(z)$ に追従する サーボ系になっている.

- $\lim_{n\to\infty} e(n) = 0$ となることの証明:

$$\lim_{n\to\infty} e(n) = \lim_{z\to 1} \frac{\frac{P(z)}{(z-1)^{k-1}}}{1 + \frac{N(z)}{(z-1)^n D(z)}}$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)^{n+1-k} P(1)}{(z-1)^n + \frac{N(1)}{D(1)}} = 0.$$

- 上記は，上述のフィードバック系において，$S(z)$ の分子が $(z-1)^n$ で割り切れ，z 変換の最終値定理が適用可能なら，これは

$$R(z) = \frac{P(z)}{(z-1)^n}$$

へのサーボ系になっている と書き直せる．

- これを一般化すると, 次のようになる.

- **命題.** 目標値 $(r(n))_{n\in\mathbb{N}}$ の z 変換 $R(z)$ の分母における不安定極に係る項の積を $D_{\mathrm{us}}(z)$ とする. 上述のフィードバック系において $S(z) = N_S(z)/D_S(z)$ と既約な形で表現したとき, $N_S(z)$ が $D_{\mathrm{us}}(z)$ で割り切れ, $D_S(z)$ が $(z-1)$ と互いに疎で, z 変換の最終値定理が適用可能なら, これは $R(z)$ へのサーボ系になっている.

- 証明.

  - ▷ $D_{\mathrm{us}}(z)$ は $R(z)$ の分母における不安定極に係る項の積だから,

$$R(z) = \frac{1}{D_{\mathrm{us}}(z)} \frac{N_R(z)}{D_R(z)}$$

としたとき, $D_R(z)$ は不安定極を含まず, 特に $D_R(1) \neq 0$ である.

▷ $S(z)$ を

$$S(z) = \frac{N_S(z)}{D_S(z)} = \frac{D_{\mathrm{us}}(z)N_S(z)}{D_S(z)}$$

と書き直したとき, $D_S(z)$ と $N_S(z)$ は既約で, $D_S(z)$ は $(z-1)$ と互いに疎と仮定したから, $D_S(1) \neq 0$ である.

▷ z 変換の最終値定理が適用可能と仮定したから,

$$\lim_{n\to\infty} e(n)$$
$$= \lim_{z\to 1}\left((z-1)D_{us}(z)\frac{N_S(z)}{D_S(z)}\frac{1}{D_{\mathrm{us}}(z)}\frac{N_R(z)}{D_R(z)}\right)$$
$$= 0.$$

- 上記は,「ユニティーフィードバック系において, 感度関数の分子が 目標値の z 変換の不安定極に係る項を (次数も含めて) すべて含むことが, そのフィードバック系が その目標値に対する サーボ系となることの必要条件である」とも書き直せる.

- これを, 感度関数が内部に目標値の伝達関数表現の不安定極をすべて含むという意味で, 内部モデル原理と呼ぶ.

- これは, あくまで必要条件である. 「z 変換の最終値定理が適用可能」という仮定が満たされるか否かは自明でない. また, 目標値の z 変換が $(z-1)$ の正の冪の項を含まない場合には, $D_S(z)$ も $(z-1)$ の正の冪の項を含まないことを仮定しないと, 目標値への追従は保証されない.

- 上述の議論は, 得られたフィードバック系がサーボ系になっているための条件を述べたものであって, 積極的にサーボ系を構成する方法を述べたものではない.

- これ以降の議論では, より積極的にサーボ系を構成する方法について述べる.

定数の目標値への追従

- 以下の 1 入力 1 出力の可制御かつ可観測な N 次システムが与えられ, その出力を定数の目標値に追従させる問題を考える.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(n+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}u(n), \\
y(n) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n).
\end{aligned}
\qquad (\star)
$$

- 目標値を r (定数) とし, まず状態フィードバックによる制御則

$$u(n) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(n) + kr$$

を考える (後でオブザーバ併合系について述べる).

- 目標値は単位ステップの r 倍なので, その z 変換は

$$\frac{rz}{z-1}$$

である.

- $\boldsymbol{K}$ は

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} =: \bar{\boldsymbol{A}}$$

が安定となるように取る．このようにすると，初期値依存の項は時間とともに零に収束するから，それ除外すると，

$$Y(z) = \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\boldsymbol{B}kr\frac{z}{z-1}$$

となる．

- k をうまく調節して, $\lim_{n\to\infty} y(n) = r$ となるようにしたい.

- $\bar{\boldsymbol{A}}$ は安定で r は定数だから, このシステムのステップ応答は一定値に収束し, よって z 変換の最終値定理が使える. これに従って計算すると…

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} y(n) \\
&\quad = \lim_{z\to 1}(z-1)\left(\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\boldsymbol{B}kr\frac{z}{z-1}\right) \\
&\quad = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\boldsymbol{B}kr
\end{aligned}
$$

- 以上の計算から, 次のことがわかる.

  ▷ (☆) に対応する伝達関数が $z = 1$ に零点を持たなければ,

$$k = \frac{1}{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\boldsymbol{B}}$$

  とすることで, 定数の目標値への追従が達成される.

- (☆) に対応する伝達関数が $z = 1$ に零点を持つときは特別で, この場合, この形では定数の目標値への追従はできない.

- 制御対象の安定性は 伝達関数の零点とは無関係なので, 制御系の安定性のみを問題にする場合には 零点を考慮する必要はなかったのだが, サーボ系を構成する際には, 伝達関数の零点が問題になる.

- 以上では, 追従誤差が零になるか否かのみを議論していたのだが…

- サーボ系を構成する場合には, 追従誤差の零への収束の速さも問題になる.

- デッドビート制御系を構成しておけば, 標本点では, 有限時間で追従誤差が零になるようにできる. ただし デッドビート制御を 不用意に 離散化された連続時間制御対象に適用すると, 標本点の間で大きな振動が発生することがあるので, 注意を要する.

- 次に, オブザーバ併合系によって同様のサーボ系を構成する問題を考える.

- オブザーバを以下のように取る.

$$\hat{\boldsymbol{x}}(n+1) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n) + \boldsymbol{B}u(n) - \boldsymbol{F}(y(n) - \hat{y}(n))$$
$$\hat{y}(n) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(n)$$

- 状態推定誤差を $\boldsymbol{\varepsilon}(n) = \boldsymbol{x}(n) - \hat{\boldsymbol{x}}(n)$ とすると, これは次式を満たす.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(n+1) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{C})\boldsymbol{\varepsilon}(n)$$

- $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} =: \bar{\boldsymbol{A}}$ および $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{C} =: \boldsymbol{A}_{\mathrm{ob}}$ が安定となるように $\boldsymbol{K}$ と $\boldsymbol{F}$ を取る.

- (☆) に対応する伝達関数が $z = 1$ に零点を持たないと仮定する.

- $u(n) = \boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(n) + kr$ とする．$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(n) - \boldsymbol{\varepsilon}(n)$ である．

- 状態方程式と状態推定誤差をまとめて…

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(n+1) &= \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(n) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varepsilon}(n) + \boldsymbol{B}kr \\
\boldsymbol{\varepsilon}(n+1) &= \boldsymbol{A}_{\mathrm{ob}}\boldsymbol{\varepsilon}(n) \\
y(n) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n)
\end{aligned}
$$

- 全体を z 変換して,

$$
\begin{aligned}
Y(z) = {} & \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\boldsymbol{x}(0) \\
& + \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\boldsymbol{B}kr\frac{z}{z-1} \\
& - \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{ob}})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(0).
\end{aligned}
$$

- 零に収束する項を除くと, 状態フィードバックと同じ項が残るから, 状態フィードバックの場合と同様に,

$$k = \frac{1}{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\boldsymbol{B}}$$

とすることで, 定数の目標値へのサーボ系が構成される.

- ここまでは 1 入力 1 出力系に関する議論だった.

- 続いて, 多入力多出力系を考える.

- 以下の M 入力 P 出力の可制御かつ可観測な N 次システムが与えられ，その出力を定数の目標値ベクトルに追従させる問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(n+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n), \\
\boldsymbol{y}(n) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n).
\end{aligned}
\qquad (\bigstar)
$$

- 目標値ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし, 先と同様に

$$\boldsymbol{u}(n) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{r}$$

を考える. $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{R}^{M \times P}$ である.

- $\boldsymbol{K}$ は $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} =: \bar{\boldsymbol{A}}$ が安定となるように取る．このようにすると, 初期値依存の項は時間とともに零に収束するから, それ除外すると,

$$\boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{r}\frac{z}{z-1}$$

となる.

- Γ をうまく調節して,

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{r}$$

となるようにしたい.

- $\bar{\boldsymbol{A}}$ は安定で $\boldsymbol{r}$ は定数だから, z 変換の最終値定理が使える. これに従って計算すると…

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{y}(n) \\
&= \lim_{z\to 1}(z-1)\left(\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{r}\frac{z}{z-1}\right) \\
&= \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{r}
\end{aligned}
$$

- したがって,

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{I}$$

という行列に関する方程式が $\boldsymbol{\Gamma}$ について解ければ, その $\boldsymbol{\Gamma}$ を適用することで, 定数の目標値ベクトルへの追従が達成される.

- オブザーバ併合系に関する議論は１入力１出力の場合と同じ.

ロバスト化と定数外乱の除去

- 先に述べたサーボ系の構成は, 目標値に乗ずるゲインを直接計算する形になっている.

- 状態フィードバックによる安定化の部分については, パラメータのずれが小さければ同一の

$$u(n) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(n)$$

による安定性が可能であるが…

- 目標値に乗ずるゲインについては, パラメータのずれにより定常的な追従誤差が発生し, 好ましくない.
- これを解消したい.

- 応用では, 状態方程式の右辺に定数の外乱が加えられている場合がある (下記). $\boldsymbol{q}$ の影響の除去の可否も併せて考える.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(n+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}u(n) + \boldsymbol{q} \\ y(n) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n). \end{aligned} \qquad (\star)$$

- $G(z) = \boldsymbol{C}\left(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{B}$ の零点を特徴付けるために,

$$\boldsymbol{\Pi}(z) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{pmatrix}$$

という行列を定義する.

- 機械的な計算により, $\mathbf{\Pi}(z)$ は以下のようにも書けることが確認できる.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Pi}(z) = &\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I}\right)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \left(\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- 以上により, $\det \mathbf{\Pi}(z) = -\det(\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I})\, G(z)$ となるので,

$$G(z) = \frac{\det \mathbf{\Pi}(z)}{\det(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}$$

である.

- よって, $G(z)$ の零点は, 極零相殺される分を含めて考えれば, $\det \mathbf{\Pi}(z)$ の零点と一致する.

- 前に見たように, 定数の目標値へのサーボ系の構成は, 伝達関数行列が $z = 1$ に零点を持つとうまくいかなかった. これを踏まえ, 以下を仮定する.

  - ▷ $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ は可制御
  - ▷ $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A})$ は可観測
  - ▷ $\boldsymbol{\Pi}(z)$ は $z = 1$ に零点を持たない
  - ▷ 目標値は一定 (r とする).

- 内部モデル原理から, フィードバックループの内部に

$$\frac{1}{z-1}$$

という項作ると定数の目標値へのサーボ系の構成がうまくいくのではないかということが示唆される.

- これを踏まえ, $e(n) = r - y(n)$ とし, 状態方程式に次のシステムを追加する.

$$\theta(n+1) = \theta(n) + e(n). \qquad (\♪)$$

- $(e(n))_{n\in\mathbb{N}}$ と $(\theta(n))_{n\in\mathbb{N}}$ の z 変換をそれぞれ $E(z)$, $\Theta(z)$ とすると,

$$\Theta(z) = \frac{1}{z-1}E(z)$$

であるから, 上記によって 内部モデル原理に関するアイデアが実現されていることがわかる.

- (☆) と (♪) をまとめて, 新しい状態方程式を作る.
- $e(n) = r - y(n) = r - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n)$ となることを使うと, 次の状態空間表現されたシステムが得られる.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(n+1) \\ \theta(n+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ -\boldsymbol{C} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(n) \\ \theta(n) \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} \\ 0 \end{pmatrix} u(n) + \begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ r \end{pmatrix} \qquad (\bigstar) \\
y(n) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(n) \\ \theta(n) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

- 我々は (★) に対して極配置を実行したいのであるが, そのためには, (★) が可制御であることを確認する必要がある.

- (★) の可制御性の確認に PBH テストを用いる:

$$\mathbf{\Pi}_C = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I} & 0 & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{C} & 1-z & 0 \end{pmatrix}$$

とすると, 次ページで示すように

$$\operatorname{rank} \mathbf{\Pi}_C = n + 1$$

となるので, (★) は可制御である.

- $\operatorname{rank} \mathbf{\Pi}_C = n + 1$ であることの証明

  - ▷ $z \neq 1$ なら, $\mathbf{\Pi}_C$ は $(\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{B})$ に一次独立な行が追加されていて, $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ は可制御だから, $\operatorname{rank} \mathbf{\Pi}_C = n + 1$.

▷ $z = 1$ なら,

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{\Pi}_C = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{pmatrix} =: \boldsymbol{\Pi}_1$$

$\mathbf{\Pi}_1$ は正方行列で,

$$\mathbf{\Pi}(z)\Big|_{z=1}$$

を求めてからその最下段の行のみに -1 を掛けたものと一致する.

$\det \mathbf{\Pi}(z)$ は $z = 1$ に零点を持たないから,

$$\det \mathbf{\Pi}(z)\Big|_{z=1} \neq 0.$$

よって

$$\det \mathbf{\Pi}_1 = -\det \mathbf{\Pi}(z)\Big|_{z=1} \neq 0.$$

ゆえに, $\mathbf{\Pi}_1$ は正則であり,

$$\operatorname{rank} \mathbf{\Pi}_1 = n + 1.$$

$\blacksquare$

- (★) は可制御であることがわかったので, 状態フィードバック

$$\boldsymbol{u}(n) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(n) + k\theta(n)$$

によって安定化 (極配置) できる.

- 実は, (★) をこの状態フィードバックによって安定化した時点で, 目標値 r への追従と 外乱 $\boldsymbol{q}$ の影響の除去が達成されることが, 以下のようにして確認できる.

- 上記の状態フィードバックにより, (★) の状態方程式は以下のように変わる

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(n+1) \\ \theta(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{B}k \\ -\boldsymbol{C} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(n) \\ \theta(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ r \end{pmatrix} \quad (\blacklozenge)$$

- (◆) は安定なシステムに定数の入力ベクトルが印加された形になっているから, その解 $(\boldsymbol{x}(n), \theta(n))_{n\in\mathbb{N}}$ はある極限 $((\boldsymbol{x}(\infty), \theta(\infty))$ とする) に収束する.
- 極限の計算に z 変換の最終値定理を使う.

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(\infty) \\ \theta(\infty) \end{pmatrix} = \lim_{z \to 1} (z-1)
$$

$$
\cdot \left(\begin{pmatrix} z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{B}k \\ \boldsymbol{C} & z-1 \end{pmatrix}^{-1} \frac{z}{z-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ r \end{pmatrix} \right)
$$

$$
= \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{B}k \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ r \end{pmatrix}
$$

- $\mathbf{\Pi}(z)$ が $z = 1$ に零点を持たないことから, 逆行列が取れることが保証されていることに注意.

- このとき, $(y(n))_{n\in\mathbb{N}}$ もある極限 ($y(\infty)$ とする) に収束するが, $y(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n)$ だから…

$$
\begin{aligned}
y(\infty) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(\infty) \\ \theta(\infty) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{B}k \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(\infty) \\ \theta(\infty) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- ここに, 先ほど求めた $(\boldsymbol{x}(\infty)^T, \theta(\infty))^T$ を代入すると…

$$
\begin{aligned}
y(\infty) &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ r \end{pmatrix} \\
&= r.
\end{aligned}
$$

- 以上の計算により, 目標値への追従が達成され, かつ外乱 $\boldsymbol{q}$ の影響が除去されていることがわかる.

- オブザーバ併合系の構成とその解析は先ほどと同様．$\theta(n)$ を推定する必要はないので，$\boldsymbol{x}(n)$ に対してオブザーバを構成すればよい．

- システムのパラメータの変動が小さければ, 先に述べた安定化制御則

$$\boldsymbol{u}(n) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(n) + k\theta(n)$$

は変動後のシステムも安定化するから, 上述の構成は システムパラメータの変動および定数外乱に対してロバストな構成になっている.

最適サーボ

- 最適レギュレータの考え方をサーボ問題に適用することで, 最適サーボと呼ばれるものを構成することができる. 考え方は最適レギュレータと変わらないのでこの講義では説明しない. 興味がある者は文献を参照せよ.

任意波形への追従

- 制御対象の出力を任意波形に追従させるサーボ系は, モデル追従制御系と呼ばれることがある. 1 入力 1 出力で N 次の可制御かつ可観測なシステム (下記) に対し, これを構成する.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(n+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}u(n), \\ y(n) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n). \end{aligned} \qquad (\star)$$

- (☆) に対応する伝達関数を

$$G(z) = g_0 \frac{N(z)}{D(z)}$$

とする．通常の伝達関数表現では, 分母多項式をモニックとし, 分子多項式には何の制限も設けないが, ここでは, 分子多項式の最高次の係数 g_0 を括り出し, $N(z)$ がモニックとなるようにしておく.

- これから述べる方法は, 極配置によって $G(z)$ の零点をすべて打ち消す方法である． よって, その方法が適用可能であるためには, $G(z)$ の分子多項式が安定であることが必要となる (そのような系を最小位相系と呼ぶ). 以下では, $G(z)$ が最小位相系であることを仮定する.

- $G(z)$ の相対次数 (分母多項式と分子多項式の次数の差) を ρ とおく.

- 制御対象の出力を 目標値 $(r(n))_{n\in\mathbb{N}}$ に ρ ステップ遅れて追従させることを考える. この遅延が許容できない場合には 目標値の作り方を工夫する必要があるが, それについては後で述べる.

- 先と同様に, 状態フィードバックについて述べ, 続いてオブザーバ併合系について述べる.

- 状態フィードバックによる制御則を,

$$u(n) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(n) + \frac{1}{g_0} r(n)$$

とする．ただし, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(n)$ によって (☆) の極は $z^{\rho} N(z)$ に配置されるものとする.

- この極配置によって, $G(z)$ の分母は $D(z)$ から $z^{\rho}N(z)$ に変わるが, 分子は変わらない.

- したがって, $(r(n))_{n\in\mathbb{N}}$ の z 変換を $R(z)$ とすると, 以下の形になる. ただし, $X_0(z)$ は初期値依存項である.

$$Y(z) = \frac{1}{z^\rho} R(z) + X_0(z)$$

- $\mathcal{Z}^{-1}[X_0(z)] = (\varepsilon(n))_{n\in\mathbb{N}}$ とする．極配置によって (☆) は安定化されていたから, $\varepsilon(n) \to 0$ $(n \to \infty)$ である．

- z 変換の各項の係数を比較すると, $n \geq \rho$ に対し,

$$y(n) = r(n - \rho) + \varepsilon(n)$$

である. $\varepsilon(n)$ は零に収束するから, 上記によって, ρ ステップの遅延を伴う, 目標値 $(r(n))_{n \in \mathbb{N}}$ への漸近的な追従が達成されている.

- 次にオブザーバ併合系であるが, この部分の構成および解析の手順は, 定数の目標値への追従と同一. よって, オブザーバ併合系でも, ρ ステップの遅延を伴う目標値 $(r(n))_{n\in\mathbb{N}}$ への漸近的な追従が達成されるという結論は不変.

- 続いて, ρ ステップの遅延が許容できない場合を考える.

- この場合は, 目標値 $(r(n))_{n\in\mathbb{N}}$ を, 次の形の安定な ρ 次の状態空間表現されたシステムに信号 $(\theta(n))_{n\in\mathbb{N}}$ を通すことで生成する. 目標値を作るためのシステムは我々が人工的に付加するものだから, その初期値は零としてよい.

- 目標値生成フィルタ：

$$\boldsymbol{x}^R(n+1) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \boldsymbol{I}_{\rho-1} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho} \end{array}\right) \boldsymbol{x}^R(n) + \boldsymbol{e}_\rho \theta(n)$$

$$r(n) = \boldsymbol{e}_1^T \boldsymbol{x}^T(n).$$

ただし…

- ▷ $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_\rho$ はそれぞれ1番目および ρ 番目の ρ 次単位ベクトル
- ▷ $\boldsymbol{x}^R(n) \in \mathbb{R}^\rho$ はフィルタの状態変数で, 我々が人工的に付加するものだからその値は利用可能.

▷ 目標値生成フィルタは, 次式が成り立つように構成されている.

$$r(n) = x_1^R(n)$$

$$r(n+1) = x_2^R(n)$$

$$, \ldots,$$

$$r(n+\rho-1) = x_\rho^R(n),$$

$$r(n+\rho) = \alpha_1 x_1^R(n) + \cdots \alpha_\rho x_\rho^R(n) + \theta(n)$$

▷ よって, $r(n+\rho)$ は $\boldsymbol{x}^R(n)$ と $\theta(n)$ から計算できる.

- 以上のようにすると, $r(n+\rho)$ が入手可能だから, 状態フィードバックおよびオブザーバ併合系のそれぞれについて,

$$u(n) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(n) + \frac{1}{g_0} r(n+\rho)$$

$$u(n) = \boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(n) + \frac{1}{g_0} r(n+\rho)$$

という補償器を使うことで, ρ ステップの遅延を含まない 目標値への追従が達成される.