ディジタル制御 第 10 回

離散時間最適レギュレータ

最適制御とは

- 補償器は何らかの制御目的を達成するために設計されるものであるが，一般に，制御目的を達成する補償器は複数ある．今までの議論では，ある補償器が 制御目的を達成する色々な補償器の中で どの程度良いかという議論はあまりしてこなかった．

- 最適制御は, 制御系の性能に関するスカラー関数 (評価関数) を事前に定め, その評価関数に関して 最も良い 補償器 (制御則ないし制御入力の系列) を求める手法である.

- 歴史的には，最適制御は，まず非線形連続時間システム向けの理論的枠組として 作られ，続いて 非線形離散時間システムや 線形システムに適用された．

- 20 世紀中盤には 米国と ソ連 (当時) で 熾烈な 宇宙開発競争 があったが, 人工衛星や 有人宇宙飛行で 先行したのは ソ連であり, ソ連の ロケット技術を支えた重要な要素のひとつが 最適制御である (宇宙開発競争時代初期における 米国の敗北はスプートニクショック と呼ばれ, 米国に大きな衝撃を与え, 後のアポロ計画に繋がった).

- 最適制御はもともと非線形系のための理論ではあるが, これを線形システムに適用したものも大きな成功をおさめ, いわゆる現代制御の時代にはこれが研究の中心となった． 線形 (Linear) システムの制御において, 上述の評価関数として状態および入力の二次形式 (Quadratic form) の和の積分あるいは和を用いるたものを **LQ 制御**と呼ぶ．LQ は Linear Quadratic の意味である．

- 線形システムの最適制御は 20 世紀後半には完成し, もはや新しい研究の余地はないが, 非線形システムの最適制御の研究は継続中.

- この講義では, 非線形離散時間システムの最適制御について紹介した後で, 離散時間線形システムの最適制御について述べる.

- 最適制御を安定化問題に適用したものを最適レギュレータ, サーボ系に適用したものを最適サーボと呼ぶ. 今回の講義では前者のみを取り扱う.

- 最適制御について説明するためには予備知識として非線形最適化の理論が必要となるため, まずそれについて準備する.

非線形最適化

- 非線形最適化とは, 変数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ を動かして, スカラー値関数 $f(\boldsymbol{x})$ が最小 (あるいは最大) となる点 とその最小値 (あるいは最大値) を探索することを言う. 変数 $\boldsymbol{x}$ が動くことができる領域に制約がない制約条件なしの最適化と, 制約がある制約条件付きの最適化がある.

- 最適化される関数 f を**目的関数**と呼ぶ (以下, 関数の引数を略すことがある).

- 制約条件なしの最適化がもっとも基本的で, 制約条件付きの最適化はこれに基づいて議論される. 最適制御と直接関係するのは後者.

- f の最大化は $-f$ の最小化によって達成されるので, 双方を並列に議論する必要はない．この講義では最小化について述べる.

- $\boldsymbol{x}_*$ が, そのある近傍における f の最適値を与えるとき, これを局所的な最適解と呼ぶ. 変数が動くことのできる領域全体 (許容領域と呼ぶ) 全体で $\boldsymbol{x}_*$ が最適値を与えるとき, これをこれを大域的な最適解と呼ぶが, この講義では大域的な最適解については議論しない.

- この講義では非線形最適化の理論的側面のみを述べ, 数値解法は取り扱わない.

制約条件なしの最適化

- 以下の最適化問題を考える．

$$\min\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N\}$$

という問題を考える．min は minimize (最小化) の略．ただし，関数 f は少なくとも C^1 級であるものとする．

- **定理.** 関数 f が $\boldsymbol{x}_*$ において局所的な最小値を取るならば,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_*} = \boldsymbol{0}$$

となる.

- **証明.**　解析学の範囲なので証明は略す．関数が極値を取る点では接線の傾きが零になるという理解でよい． ■

- 上記は f が局所的な最適となるための必要条件.

- **定理.** f が C^2 級であるとき, f が $\boldsymbol{x}_*$ において局所的な最適値を取るための十分条件は,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_*} = \boldsymbol{0}$$

かつ

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{x}^2}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_*} \text{が正定.}$$

- **証明.**　解析学の範囲なので証明は略す．関数が極値を取る点では関数のグラフが下に凸になるという理解でよい． ■

制約条件付きの最適化

- 変数 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ が動くことができる領域に制約が付いている最適化問題を考える．制約条件としては, スカラー関数 $c_i(\boldsymbol{x})$ を用いて, $\{\boldsymbol{x} : c_i(\boldsymbol{x}) = 0\}$(等式制約) あるいは $\{\boldsymbol{x} : c_i(\boldsymbol{x}) \leq 0\}$ (不等式制約) で表現できるものを取り扱う．複数の制約条件があることを想定する．

- $\{\boldsymbol{x} : c_i(\boldsymbol{x}) \geq 0\} = \{\boldsymbol{x} : -c_i(\boldsymbol{x}) \leq 0\}$ だから, 逆向きの不等号を考える必要はない. また, $\{\boldsymbol{x} : c_i(\boldsymbol{x}) \leq b\}$ は $\{\boldsymbol{x} : c_i(\boldsymbol{x}) - b \leq 0\}$ と書き直せるから, 右辺は零としてよい.

- 収束性に関する議論の便宜のために, 不等式制約には等号を付けることが一般的.

- 以下の問題を考える.

$$\min f(\boldsymbol{x}) \text{ s.t. } \begin{cases} c_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, & i \in \mathcal{I}, \\ c_i(\boldsymbol{x}) = 0, & i \in \mathcal{E}, \end{cases} \qquad (\star)$$

ただし, 制約条件は M 個あるものとする. $\mathcal{I}$, $\mathcal{E}$ については次ページで説明する.

- 前ページの記法の意味は以下の通り.
  - $\mathcal{I}$: 不等式制約に対応する添字の集合, すなわち $\{1, \ldots, M\}$ から不等式制約に対応する添字を抜き出したもの.
  - $\mathcal{E}$: 等式制約に対応する添字の集合, すなわち $\{1, \ldots, M\}$ から等式制約に対応する添字を抜き出したもの.
  - 上記の定義より, $\mathcal{I} \cup \mathcal{E} = \{1, \ldots, M\}$.

- **Lagrange 関数** L を, 次のように定義する.

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i c_i(\boldsymbol{x}).$$

- $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_M)$ は Lagrange 乗数 と呼ばれる.

- Lagrange 関数を

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{M} \lambda_i c_i(\boldsymbol{x})$$

と定義する流儀もあるので注意.

- Ω を, (☆) の制約条件がすべて満たされる点の集合とする (これを実行可能領域と呼ぶ). 以下では, $\Omega \neq \emptyset$ と仮定する.

- $\boldsymbol{x}_* \in \Omega$ がこの問題の局所的な最適解, すなわち, $\boldsymbol{x}_*$ のある近傍 $\mathcal{N}(\boldsymbol{x}_*)$ を取ったとき, $\forall x \in \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_*) \cap \Omega, f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}_*)$ となるための必要条件を知りたい. ただし, $\boldsymbol{x}_*$ の任意近傍と Ω の共通部分は $\boldsymbol{x}_*$ 以外の点を含むものとする.

- これから述べる必要条件は，**Karush–Kuhn–Tucker の条件** (**KKT 条件**と略される) と呼ばれるものである．

- **定理 (Karush–Kuhn–Tucker の必要条件).** $\boldsymbol{x}_*$ が (☆) の局所的な最適解であるとき, 次ページの一連の式を満たす $\boldsymbol{\lambda}_*$ が存在する. ただし, 次ページの式において, λ_{*i} は $\boldsymbol{\lambda}_*$ の第 i 要素をあらわす.

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=(\boldsymbol{x}_*,\boldsymbol{\lambda}_*)} &= 0, \\
c_i(\boldsymbol{x}_*) &= 0, \quad i \in \mathcal{E}, \\
c_i(\boldsymbol{x}_*) &\leq 0, \quad i \in \mathcal{I}, \\
\lambda_{*i} &\geq 0, \quad i \in \mathcal{I}, \\
\lambda_{*i} c_i(\boldsymbol{x}_*) &= 0, \quad i \in 1, \ldots, N,
\end{aligned}
$$

- **証明.**　証明については非線形計画法の教科書等を参照せよ．証明に手間がかかる定理である． ■

非線形離散時間システムの最適制御

- 以下の非線形離散時間システムを考える.

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(n), \boldsymbol{u}(n), n) \qquad (☆)$$

ただし, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^M$ で,
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(n), \boldsymbol{u}(n), n) \in \mathbb{R}^N$ とする.

- 時間に関する区間 $[0, S]$ $(S \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ に関し (ただし $[0, \infty]$ は $[0, \infty)$ と同じ意味であると解釈する), (☆) の解が何らかの基準で最適となるような制御入力を求める問題を考える. これが**最適制御問題**であるが, これは, 典型的には, 次のような形になる.

解くべき最適化問題:

$$\min \left\{ \varphi(\boldsymbol{x}(S)) + \sum_{n=0}^{S-1} l(\boldsymbol{x}(n), \boldsymbol{u}(n), n) \right\} \quad (\bigstar)$$

制約条件:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(n) \in \mathcal{X}_n, \\ \boldsymbol{u}(n) \in \mathcal{U}_n, \\ \boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(n), \boldsymbol{u}(n), n), \end{cases} \qquad (\blacklozenge)$$

ただし $0 \leq n \leq S-1$.

- $(\bigstar)$ の $\{\}$ の内部を評価関数あるいは目的関数関数 l をステージコスト, 関数 φ を終端コストと呼ぶ.
- $[0, S]$ を評価区間と呼ぶ.

- $\mathcal{X}_n$ と $\mathcal{U}_n$ は 各時刻において $\boldsymbol{x}(n)$ と $\boldsymbol{u}(n)$ が含まれていなければならない集合．これらが指定されていないときには, その制約条件は存在しないと解釈する.

- $S < \infty$ の問題は 有限時間最適制御問題, $S = \infty$ のそれは無限時間最適制御問題 と呼ばれる．後者の方が難しい．この講義では, 非線形システムについては前者のみ取り扱う．線形システムについては両方取り扱う．

- 制約条件付き最適化問題との関連を見るために, $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}^T(0), \ldots, \boldsymbol{x}^T(S))^T$, $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{u}^T(0), \ldots, \boldsymbol{u}^T(S-1))$ とおく.

- (☆) の状態方程式を評価区間で並べると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(1) &= f(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{u}(0), 0), \\
\boldsymbol{x}(2) &= f(\boldsymbol{x}(1), \boldsymbol{u}(1), 1), \\
&\cdots \\
\boldsymbol{x}(N) &= f(\boldsymbol{x}(S-1), \boldsymbol{u}(S-1), S-1)
\end{aligned}
\tag{♪}
$$

のようになる.

- 先ほどの一連の状態方程式を纏めると, 以下のように書ける.

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}) = \mathbf{0} \qquad (〒)$$

- 上記の $\boldsymbol{G}$ は (♪) の関数を並べたものである. $\boldsymbol{G}$ の各成分関数の最後の引数には定数としての効果しかないので略した.

- 同様に, 評価関数は,

$$K(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$$

のように書ける (K は ($\bigstar$) の $\{\}$ 内の関数).

- よって, 離散時間の有限時間最適制御問題は,

$$\min K(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}) \text{ s.t. } \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{X} \in \prod_{n=0}^{S} \mathcal{X}_n, \boldsymbol{U} \in \prod_{n=1}^{S-1} \mathcal{U}_n$$

という制約条件付きの非線形最適化問題へと帰着される (便宜上 $\mathcal{X}_S = \mathbb{R}^N$ とした).

- 上記にKKT条件を適用すれば 制御則が最適であるために の必要条件が得られる.

- 以下では, 議論が繁雑となることを避けるため, 各時刻 n における $\boldsymbol{x}(n)$ と $\boldsymbol{u}(n)$ に係る制約 $(\mathcal{X}_n, \mathcal{U}_n)$ はないものとする.

- Lagrange 乗数を $\boldsymbol{\Lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_S)$ とすると, この最適化問題の Lagrange 関数は, 次ページのようになる.

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{\Lambda})
&= \varphi(\boldsymbol{X}(S)) + \sum_{n=0}^{S-1} l(\boldsymbol{x}(n), \boldsymbol{u}(n), n) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{S-1} \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(n), \boldsymbol{u}(n), t) - \boldsymbol{x}_{n+1} \right),
\end{aligned}
$$

- KKT 条件は 以下のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{X}} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{U}} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\Lambda}} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{KKT}$$

- 最適制御の分野では, Hamliton 関数と呼ばれる関数を使って上記を書き直すことが一般的. これについて述べる.

- (☆)(★) に対する Hamilton 関数 H は, 以下のように定義される.

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$$

これを使って Lagrange 関数を次ページのように書き直す.

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{\Lambda})
&= \varphi(\boldsymbol{x}(S)) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{S-1} H(\boldsymbol{x}(n), \boldsymbol{u}(n), \boldsymbol{\lambda}(n+1), n) \\
&\quad - \sum_{n=0}^{S-1} \boldsymbol{\lambda}(n+1)\boldsymbol{x}(n+1).
\end{aligned}
$$

- これを使うと, (KKT) の第 1 式は, 以下のようになる $(0 \le n \le S-1)$.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}(S) &= \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(S)}, \\
\boldsymbol{\lambda}(n) &= \left.\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},t)=(\boldsymbol{x}(n),\boldsymbol{u}(n),\boldsymbol{\lambda}(n+1),n)}
\end{aligned}
$$

- (KKT) の第 2 式は, 以下のようになる $(0 \le n \le S-1)$.

$$\mathbf{0} = \left.\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},t)=(\boldsymbol{x}(n),\boldsymbol{u}(n),\boldsymbol{\lambda}(n+1),n)}.$$

- まとめると, 次ページの式を連立させて解くことで最適制御が得られる $(0 \le n \le S-1)$. これは, 計算量は大きいが, 概念的には解ける問題である.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(n+1) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(n), \boldsymbol{u}(n), n) \\
\boldsymbol{\lambda}(S) &= \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(S)} \\
\boldsymbol{\lambda}(n) &= \left.\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},t)=(\boldsymbol{x}(n),\boldsymbol{u}(n),\boldsymbol{\lambda}(n+1),n)} \\
\mathbf{0} &= \left.\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},t)=(\boldsymbol{x}(n),\boldsymbol{u}(n),\boldsymbol{\lambda}(n+1),t)}
\end{aligned}
\qquad (◎)
$$

- 上述の問題では, 一部の変数 ($\boldsymbol{x}(n)$) の初期時刻における値と, 他の一部の変数 ($\boldsymbol{\lambda}(n)$) の終端時刻における値が指定されている．このような問題を **2 点境界値問題**と呼ぶ．2 点境界値問題は, 初期値問題と異なり, 解く際に工夫が必要であるが, 解法についてはこの講義では述べない.

LQ 最適制御

- 以下では線形時不変システム

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n) \qquad (☆)$$

を対象とし, 2 次形式の評価関数に関する最適制御問題について述べる. ただし, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^M$ である.

- 以下の議論では, 正定対称行列や半正定対称行列に関し, しばしば, 「対称」「行列」を略し, 正定, 半正定と呼ぶ.

- 評価関数として, 次のような 2 次形式を選択する.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(S)\boldsymbol{\Phi}(S)\boldsymbol{x}(S))\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{S-1}\boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(n)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{S-1}\boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(n)
\end{aligned}
\qquad (\bigstar)
$$

$(\bigstar)$ において, $\mathbf{\Phi}(S)$ と $\boldsymbol{Q}$ は半正定で, $\boldsymbol{R}$ は正定であるものとする.

- 線形システム (☆) を対象とした，評価関数 (★) に関する最適制御を，**LQ 最適制御**と呼ぶのだが，**LQ** の由来は…
  - ▷ **L**: 対象とするシステムが線形 (Linear)
  - ▷ **Q**: 評価関数が 2 次形式 (Quadratic form)

- 以降, 議論の簡単のため,

$$\boldsymbol{x}(n) \in \mathcal{X}_n$$

$$\boldsymbol{u}(n) \in \mathcal{U}_n$$

という形の制約条件はないものとする.

- (☆) の制約条件のもとで (★) を解くことで得られる補償器を, **LQ レギュレータ**, **最適レギュレータ**などと呼ぶ.

- この問題に対する Hamilton 関数は以下のようになる.

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}\right) + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u})$$

- これを使い, 既に求めた最適制御に関する必要条件 (◎) を適用すると…

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}(S) &= \boldsymbol{x}^T(S)\boldsymbol{\Phi}(S) \\
\boldsymbol{\lambda}(n) &= \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{\lambda}(n+1)\boldsymbol{A} \\
\boldsymbol{x}(n+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n) \\
\boldsymbol{0} &= \boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{R} + \boldsymbol{\lambda}(n+1)\boldsymbol{B}
\end{aligned}
\qquad (\square)
$$

- (□) を解くことにより最適レギュレータ (の必要条件を満たす解) が得られるが···
- 数値的に解き易くするため, これを変形する.

- 終端時刻 S において,

$$\boldsymbol{\lambda}(S) = \boldsymbol{x}^T(S)\boldsymbol{\Phi}(S)$$

という関係が成り立つことに注意する.

- 帰納的に, $n = S,\ S-1,\ \ldots,\ k+1$ まで, ある対称行列 $\boldsymbol{\Phi}(n)$ が取れ,

$$\boldsymbol{\lambda}(n) = \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{\Phi}(n) \tag{$\flat$}$$

となっていると仮定する.

- $n = k$ についても ($\flat$) が成り立つように

$$\mathbf{\Phi}(n)$$

を決めたい.

- このために, ($\flat$) を ($\square$) の第 4 式で $n = k$ としたもの:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{u}^T(k)\boldsymbol{R} + \boldsymbol{\lambda}(k+1)\boldsymbol{B}$$

に代入する.

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{u}^T(k)\boldsymbol{R} + \boldsymbol{x}^T(k+1)\boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{B}$$

であるが…

これに (□) の第 3 式を代入して全体を転置すると, 以下のようになる.

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1) \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \right)$$

$\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{B}$ が逆行列を持つことを仮定し (後で示す),

$$\boldsymbol{K}(k)$$
$$= -\left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{B}\right)^{-1} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{A}$$

とおくと,

$$\boldsymbol{u}(k) = \boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{x}(k)$$

となる.

- (□) の第 2 式と $\boldsymbol{u}(k) = \boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{x}(k)$ を用いると,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}(k) &= \boldsymbol{x}^T(k)\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{\lambda}(k+1)\boldsymbol{A} \\
&= \boldsymbol{x}^T(k)\boldsymbol{Q} \\
&\quad + \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{x}(k)\right)^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{A}.
\end{aligned}
$$

- したがって, $\boldsymbol{\lambda}(k) = \boldsymbol{x}^T(k)\boldsymbol{\Phi}(k)$ となるようにするためには,

$$\boldsymbol{\Phi}(k) = \boldsymbol{Q} + \left(\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{K}^T(k)\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{A}.$$

であればよい.

- これに $\boldsymbol{K}$ を代入すると, 次式が得られる.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}(k) = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1) \boldsymbol{A} \\
&- \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1) \\
&\cdot \boldsymbol{B} \left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1) \boldsymbol{B} \right)^{-1} \boldsymbol{B}^T \\
&\cdot \boldsymbol{\Phi}(k+1) \boldsymbol{A}.
\end{aligned}
$$

これは確かに対称行列になっている.

- ただし, 画面サイズの都合で数式の途中で改行が入ってしまった場合には, $\cdot$ によって行列等の積を表している.

- 以上の計算によって, $\mathbf{\Phi}(n)$ を, $\mathbf{\Phi}(S)$ から出発して, 帰納的に, 次ページの式 (これを **Riccati 方程式**と呼ぶ) によって定めることで, 最適レギュレータ (の必要条件を満たす解) が得られる.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}(n) = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Phi}(n+1)\boldsymbol{A} \\
- \Big(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Phi}(n+1)\boldsymbol{B}\Big) \\
\cdot \Big(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(n+1)\boldsymbol{B}\Big)^{-1} \\
\cdot \Big(\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(n+1)\boldsymbol{A}\Big)
\end{aligned}
\qquad (\ast)
$$

- $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{k})$ が半正定であることがまだ証明されていなかった．これについて述べる．

- **補題.**　上記で得られる行列 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{k})$ は半正定である.

- 証明.
  - ▷ $\boldsymbol{\Phi(S)}$ が 半正定であることは仮定されている.

- ▷ 帰納法によって任意に $k : 0 \leq k \leq S$ に対して $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{k})$ が 半正定であることを示すが, $k = S$ から始めて $k = S - 1$, $k = S - 2$ の順に, k を減ずる形で帰納法を適用する.

▷ $\boldsymbol{\Phi(k+1)}$ が半正定であると仮定する.

▷ 以下の計算の便宜のために,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{11} &= \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{A} \\
\boldsymbol{M}_{12} &= \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{B}, \\
\boldsymbol{M}_{22} &= \boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

と定義する.

▷ 次式で定義される行列 $\boldsymbol{M}(k+1)$ を考える.

$$\boldsymbol{M}(k+1) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} \\ \boldsymbol{M}_{12}^T & \boldsymbol{M}_{22}. \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{R}$ は正定であると仮定されていたから, $\boldsymbol{M}_{22}$ は正定, よって正則である.

▷ $\boldsymbol{M}(k+1)$ は半正定である．これを示す．

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{M}(k+1) \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{R} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{B} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{$\flat$}
$$

である.

($\flat$) の右辺の左側の行列は仮定より半正定.

後者については, $\mathbf{\Phi}(k+1)$ が半正定であることが帰納法の仮定だったから, これを用いる．このとき, $\mathbf{\Phi}(k+1) = \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{\Psi}$ となるような半正定対称行列 $\mathbf{\Psi}$ が取れる．これを用いると…

$$
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{B} \\
\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{A} & \boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{B}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Psi} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Psi}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{B}
\end{pmatrix}
$$

となるから, ($\flat$) の右辺の右側の行列も半正定. よって $\boldsymbol{M}(k+1)$ は 半正定.

▷ $\boldsymbol{M}(k+1)$ は半正定だから, 任意の $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{x}^T, \boldsymbol{u}^T)\boldsymbol{M}(k+1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{u}\end{pmatrix}\\
&= (\boldsymbol{x}^T, \boldsymbol{u}^T)\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12}\\ \boldsymbol{M}_{12}^T & \boldsymbol{M}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{u}\end{pmatrix} \geq 0.
\end{aligned}
$$

特に, $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{M}_{22}^{-1}\boldsymbol{M}_{12}^{T}\boldsymbol{x}$ とすると,

$$\boldsymbol{x}^T \left(\boldsymbol{M}_{11} - \boldsymbol{M}_{12}\boldsymbol{M}_{22}^{-1}\boldsymbol{M}_{12}^{T}\right) \boldsymbol{x} \geq 0.$$

よって上式中央の行列は半正定.

前ページの式に

$$\boldsymbol{M}_{11} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{M}_{12} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{M}_{22} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{B}$$

を代入すると…

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{B} \\
&\quad - \left(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{B}\right) \\
&\qquad \cdot \left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{B}\right)^{-1} \\
&\qquad \cdot \left(\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(k+1)\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\right) \\
&\geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

となるが, この左辺は $\boldsymbol{\Phi}(k)$ である.

よって $\boldsymbol{\Phi}(k)$ は 半正定. ■

- Riccati 方程式には 色々なバリエーションがあり ((∗) はその一種), 2 次形式の評価関数を最適化する制御問題において頻繁に現れるため, 理論および応用の双方で重要である.

- 非線形最適制御問題を解くことは必ずしも容易ではないが, 上述の形の 有限時間のLQ最適制御問題は 容易に解ける. ただし, 補償器は時変である.

- 先の証明中で得られた制御入力の式も重要なので, 改めて書き直しておく.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(n) &= -\left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(n+1)\boldsymbol{B}\right)^{-1} \\
&\qquad\qquad \cdot \left(\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(n+1)\boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{x}(n) \\
\boldsymbol{\Phi}(n) &= \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Phi}(n+1)\boldsymbol{A} \\
&\quad - \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Phi}(n+1)\boldsymbol{B} \\
&\qquad \cdot \left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(n+1)\boldsymbol{B}\right)^{-1} \\
&\qquad \cdot \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\Phi}(n+1)\boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

- LQ 最適制御問題の解である時変補償器は応用上は使いにくい．そこで，これを代替する時不変の補償器がないかどうかを考える．

- Ricatti 方程式は, $n = S$ から始めて $n = 0$ まで 時間軸に関して逆に $(\mathbf{\Phi}(n))_{n=0,\ldots,S}$ を求める方程式であるが, 上述の代替案として, この方程式の解が「収束する」先を用いたい.

- 収束に関する議論をするとき, 時間軸が $n = 0$ で終わるのは不便なので, 時間軸を反転して, 次ページの方程式を考える (これも Ricatti 方程式と呼ぶ).

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(n+1) = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}(n) \boldsymbol{A} \\
- \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}(n) \boldsymbol{B} \\
\cdot \left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{P}(n) \boldsymbol{B} \right)^{-1} \\
\cdot \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{P}(n) \boldsymbol{A}
\end{aligned}
\qquad (\text{♪})
$$

- $\boldsymbol{S}$ は半正定で $\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S} = \boldsymbol{Q}$ を満たすものとする. $\boldsymbol{P}(n)$ の初期値 $\boldsymbol{P}(0)$ を半正定に取り, (♪) を順次解くと, $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ が可制御かつ $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{A})$ が可観測なときには, $\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{P}(n) = \boldsymbol{P}$ となる正定行列 $\boldsymbol{P}$ が存在し,

$$\boldsymbol{u}(n) = -\left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{B}\right)^{-1} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}(n) \tag{$\flat$}$$

が安定化制御則となることが示せる (証明略).

- $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}(n) = \boldsymbol{P}$ が存在するとき, (♪) の両辺で極限を取ると, 次の方程式が得られる. これを **代数 Ricatti 方程式**, **Ricatti 代数方程式**などと呼ぶ.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} \\ &\quad - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\end{aligned} \tag{♯}$$

- 連続時間最適制御問題 でも Riccati 方程式と呼ばれる方程式があらわれる (Riccati 微分方程式, Riccati 代数方程式). これらは離散時間のそれと類似しているが, 同一ではない.

- 代数 Riccati 方程式を数値的に解く際には, 十分大きい n に対する (♪) の解をもって極限の近似としてもよいが, より効率の良い解法が知られている (この講義では取り扱わない).

- 今までは有限時間の最適制御について議論してきたのだが, 次に, 応用上重要な, 線形時不変システムに対する無限時間最適制御問題を考える.

- $\boldsymbol{Q}$ は半正定，$\boldsymbol{R}$ は正定で，$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ は可制御，$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S} = \boldsymbol{Q}$ を満たす半正定な $\boldsymbol{S}$ に対し $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{A})$ は可観測であるものとする．

- 線形時不変システムに対する無限時間最適制御問題は, 次のような問題である.

$$\min \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(n)\right\} \qquad (\bigstar)$$

$$\text{s.t. } \boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n)$$

- **定理.** 静的状態フィードバック $\boldsymbol{u}(n) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(n)$ の中で解を探索すると,

$$\boldsymbol{u}(n) = -\left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n)$$

が (★) の最適解を与える．ただし, $\boldsymbol{P}$ は 以下の代数 Riccati 方程式の正定解である.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} \\ - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

- 証明.
  - ▷ (★) の状態方程式は可制御だから, 状態フィードバックによって安定化可能であり, この入力の下で (★) の評価関数は有限の値となる. 最適値はこの値以下だから, 有限である.

▷ $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{A})$ が可観測で, $(\bigstar)$ の最適値が有限だから, 対応する $(\boldsymbol{x}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ は

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{0}$$

を満たさねばならない. したがって,

$$\boldsymbol{u}(n) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(n)$$

を最適解の候補とすると, これは安定化制御則である.

- ▷ $J(\boldsymbol{u}) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(n)$ とおく.
- ▷ $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$ とおく.
- ▷ 後で, $(\boldsymbol{K}^*)^T\boldsymbol{X}\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$ となることを使う.

▷ $\boldsymbol{x}(n) \to 0(n \to \infty)$ であるから,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{x}^T(n+1)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n+1) \\
&\qquad - \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n) \\
&= -\boldsymbol{x}^T(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0)
\end{aligned}
$$

である.

▷ 前ページの式の右辺は, 次のように変形できる.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}^T(n+1)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n+1) - \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n) \\
&= \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) - \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n) \\
&\quad + \boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) \\
&\quad + \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n) \\
&\quad + \boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n)
\end{aligned}
$$

- ▷ 先の式を用いて評価関数を変形する.

$$
\mathbf{0} = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg(\boldsymbol{x}^T(n+1)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n+1) \\
- \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n) \Bigg) \\
+ \boldsymbol{x}^T(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0)
$$

だから…

$$
\begin{aligned}
J(\boldsymbol{u}) = J(\boldsymbol{u}) \\
+\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(\boldsymbol{x}^T(n{+}1)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n{+}1){-}\boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n)\Bigr) \\
+\,\boldsymbol{x}^T(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0).
\end{aligned}
$$

($\mathbf{0}$ を加えているだけ)

以下，直前のページの等号右辺の式を RHS と書く．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{RHS} = {} & \boldsymbol{x}^T(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0) \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{x}^T(n)(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{x}(n) \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg(\boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) \\
& \qquad + \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n) \\
& \qquad + \boldsymbol{u}^T(n)(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}(n) \Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{RHS} = {} & \boldsymbol{x}^T(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0) \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\boldsymbol{u}(n) + \boldsymbol{K}^* \boldsymbol{x}(n) \Big)^T \boldsymbol{X} \Big(\boldsymbol{u}(n) + \boldsymbol{K}^* \boldsymbol{x}(n) \Big) \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{x}^T(n) \\
& \cdot \Big(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P} - \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} \Big) \boldsymbol{x}(n)
\end{aligned}
$$

▷ 代数 Riccati 方程式を代入すると ($\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{B}$ に注意) 上式の最後の項は消え, 次式が得られる.

$$
\begin{aligned}
J(\boldsymbol{u}) = {} & \boldsymbol{x}^T(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0) \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\boldsymbol{u}(n) + \boldsymbol{K}^* \boldsymbol{x}(n) \Big)^T \boldsymbol{X} \\
& \cdot \Big(\boldsymbol{u}(n) + \boldsymbol{K}^* \boldsymbol{x}(n) \Big)
\end{aligned}
$$

- ▷ よって, $J(\boldsymbol{u})$ は $\boldsymbol{u}(n) = -\boldsymbol{K}^{*}\boldsymbol{x}(n)$ で最小値 $\boldsymbol{x}^{T}(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0)$ を取る.

▷ ゆえに,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(n) &= -\boldsymbol{K}^{*}\boldsymbol{x}(n) \\
&= -(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n)
\end{aligned}
$$

はこの最適制御問題の状態フィードバック解である. ■