ディジタル制御 第9回

離散時間オブザーバ併合系

双対性

- 以下の 2 個の線形システムを考える:
  ただし $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{N\times M}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{P\times N}$, $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{P\times M}$.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(n+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n), \\
\boldsymbol{y}(n) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(n)
\end{aligned}
\tag{P}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(n+1) &= \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{u}(n), \\
\boldsymbol{y}(n) &= \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{u}(n)
\end{aligned}
\tag{D}
$$

- 以下のように定義する:

$\boldsymbol{M}_{CP}$	システム (P) の可制御性行列
$\boldsymbol{M}_{CD}$	システム (D) の可制御性行列
$\boldsymbol{M}_{OP}$	システム (P) の可観測性行列
$\boldsymbol{M}_{OD}$	システム (D) の可観測性行列

$$\boldsymbol{M}_{CP} = (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \ldots, \boldsymbol{A}^{N-1}\boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{M}_{OP} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{N-1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{CD} = (\boldsymbol{C}^T, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T, \ldots, (\boldsymbol{A}^T)^{N-1}\boldsymbol{C}^T)$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{M}_{CD}^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{N-1} \end{pmatrix}$$

$$
\boldsymbol{M}_{OD} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^T \\ \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{A}^T)^N - 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
\boldsymbol{M}_{OD}^T = (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \ldots, \boldsymbol{A}^{N-1}\boldsymbol{B})
$$

- 以下の等式が成り立つ.
  - ▷ $\boldsymbol{M}_{CP} = \boldsymbol{M}_{OD}^{T}$,
  - ▷ $\boldsymbol{M}_{OP} = \boldsymbol{M}_{CD}^{T}$.

- したがって…
  - ▷ (P) が可制御であることと
    (D) が可観測であることは等価.
  - ▷ (P) が可観測であることと
    (D) が可制御であることは等価.
- この性質を 双対性 と呼ぶ.

- (D) を (P) の双対システムと呼ぶ.

- (P) および (D) を z 変換して, 伝達関数行列を求めると, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\text{(P)} \quad \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D} \\
&\text{(D)} \quad \boldsymbol{B}^T(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^{-1}\boldsymbol{C}^T+\boldsymbol{D}^T
\end{aligned}
$$

- (D) の伝達関数行列は, (P) の伝達関数行列を転置したものになっている.
- 双対性は, この対称的な構造ゆえに成立している.

- 以前の講義で 伝達関数の 可制御正準形 による実現と 可観測正準形 による実現について述べ, 今回の講義で 状態方程式を 可制御正準形に変換する手順について述べた.

- 状態空間表現されたシステムが可観測であれば, それを, 類似した方法によって, 可観測正準形に変換することができる.

- 双対性より, 状態空間表現されたシステムを可制御正準形に変換してから その双対システムを作れば, 可制御正準形が得られることが期待される.

- これはおおむね正しいのであるが, 可制御正準形を得るために, 状態変数の並べ換えという工程が 追加で必要になる (後述).

- 伝達関数表現されたシステム

$$G(z) = \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3}$$

の可制御正準形と可観測正準形による実現を比較することで, これを確認する.

- $G(z)$ の可制御正準形による実現:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(n+1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(n) \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(n) \\
y(n) &= (b_3, b_2, b_1)\boldsymbol{x}(n)
\end{aligned}
\tag{C}
$$

- **(C) の双対システム:**

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(n) + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} u(n) \tag{CD}$$

$$y(n) = (0, 0, 1)\boldsymbol{x}(n)$$

- $G(z)$ の可観測正準形による実現

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(n) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} u(n) \tag{O}$$

$$y(n) = (1, 0, 0)\boldsymbol{x}(n)$$

- **(O)** の双対システム

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(n+1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(n) \\
&\quad + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} u(n) \qquad \text{(OD)} \\
y(n) &= (0, 0, 1)\boldsymbol{x}(n)
\end{aligned}
$$

- (CD)=(O), (OD)=(C) となっても良いようなものだが…
- 零や 1 が入っている箇所やパラメータの並び方が違う.
- この (CD) と (O) の相異を解消することを考える.

- (CD) において, $w_1(n) = x_3(n)$, $w_2(n) = x_2(n)$, $w_3(n) = x_1(n)$ のように状態変数の添字を逆順に並べ換える.

- 並べ換え前:

$$
\begin{aligned}
x_1(n+1) &= -a_3 x_3(n) + b_3 u(n) \\
x_2(n+1) &= x_1(n) - a_2 x_3(n) + b_2 u(n) \\
x_3(n+1) &= x_2(n) - a_1 x_3(n) + b_1 u(n) \\
y(n) &= x_3(n)
\end{aligned}
$$

並べ換え後:

$$
\begin{aligned}
w_3(n+1) &= -a_3 w_1(n) + b_3 u(n) \\
w_2(n+1) &= w_3(n) - a_2 w_1(n) + b_2 u(n \\
w_1(n+1) &= w_2(n) - a_1 w_1(n) + b_1 u(n) \\
y(n) &= w_1(n)
\end{aligned}
$$

- 並べ換え後のシステムを行列の形でまとめる.

- 双対システムの状態変数の並べ換え

$$
\boldsymbol{w}(n+1) = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{w}(n) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} u(n) \tag{CDS}
$$

$$
y(n) = (1, 0, 0)\boldsymbol{w}(n)
$$

- $G(z)$ の可観測正準形による実現

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(n) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} u(n) \quad \text{(O)}$$

$$y(n) = (1, 0, 0)\boldsymbol{x}(n)$$

- (CDS) と (O) は一致.

- 要するに, 可観測正準形は, 可制御正準形による実現の双対システムにおいて状態変数の並びを逆順に入れ換えることでも得られる.
- より高い次元, あるいは多入力多出力システムでも事情は同じ.

- 状態変数を並べ換えると対応する行列の見掛け上の形が変わることが, 可制御正準形あるいは可観測正準形と呼ばれるものが複数存在する理由のひとつ.

オブザーバ併合系

- 状態空間表現されたシステムでは, 多くの場合, 出力 $\boldsymbol{y}(n)$ は観測できるが, 状態 $\boldsymbol{x}(n)$ を直接観測することはできない.

- 線形時不変システムが可制御なら状態フィードバックによって安定化できるし, 可観測なら Luenberger オブザーバによって状態を推定できる.

- 状態フィードバックと Luenberger オブザーバを組み合わせた補償器をオブザーバコントローラ, それが組み込まれた制御システムをオブザーバ併合系と呼ぶ.

- 問題になるのは, オブザーバコントローラによって制御対象を安定化する補償器を構成することは可能かということ.

- 線形時不変システムでは, 上記の問への回答は肯定的で, 以下の事実が成り立つ (分離定理と呼ばれる).

- **定理 (分離定理).**　可制御かつ可観測な線形時不変システムの状態フィードバックによる安定化補償器を $\boldsymbol{u}(n) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(n)$ とし, Luenberger オブザーバによる状態推定値を $\hat{\boldsymbol{x}}(n)$ としたとき, オブザーバコントローラ

$$\boldsymbol{u}(n) = \boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(n)$$

によって システムを安定化することができる.

- 証明.
  - ▷ 制御対象の状態空間表現が以下のように与えられているものとする.

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n)$$
$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n)$$

▷ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$ が安定になるような状態フィードバックの係数行列 $\boldsymbol{K}$ を求めておく.

▷ Luenberger オブザーバは次の通り.

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}(n+1) &= \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n) \\ &\quad - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}(n) - \hat{\boldsymbol{y}}(n)) \\ \hat{\boldsymbol{y}}(n) &= \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(n)\end{aligned}$$

ただし, $\boldsymbol{F}$ は, $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{C}$ が安定となるように取る.

- ▷ 状態推定誤差を $\boldsymbol{\varepsilon}(n) = \boldsymbol{x}(n) - \hat{\boldsymbol{x}}(n)$ とすると, $\boldsymbol{\varepsilon}(n)$ は次式を満たす.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(n+1) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{C})\boldsymbol{\varepsilon}(n)$$

- ▷ オブザーバコントローラは $\boldsymbol{u}(n) = \boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(n)$ であるが, これを $\boldsymbol{u}(n) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(n) - \boldsymbol{K}\boldsymbol{\varepsilon}(n)$ と書き直す.

▷ $(\boldsymbol{x}(n), \boldsymbol{\varepsilon}(n))$ に関する状態方程式を作ると,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(n+1) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK} & -\boldsymbol{BK} \\ & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{FC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(n) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(n) \end{pmatrix}$$

となる (空白は零).

▷ 上記の行列はブロック三角行列で, その固有値は $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK}$ および $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{FC}$ の固有値になるが, これらの絶対値は1未満. よってオブザーバ併合系は安定. ■

- 分離定理は 線形時不変システムにおいて オブザーバコントローラの妥当性を保証する重要な定理. 連続時間と離散時間のいずれでも成立する. 証明の方法も同様.

- 出力に入力からの直達項がある場合, すなわち,

$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(n)$$

となっているときは, $\boldsymbol{y}(n)$ のかわりに

$$\boldsymbol{y}(n) - \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(n)$$

を用いればよい.

可制御性と可観測性の別の特徴付け

- 可制御性, 可観測性とも, H_∞ 制御などでは, 今まで述べた形ではなく, Popov, Belevitch, Hautus によって提案された判定法が用いられる (提案者の頭文字を取って PBH テストと呼ばれる). これについて述べる.

- N 次で M 入力 P 出力の状態空間表現されたシステムを考える.

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n)$$
$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n)$$

- このシステムの可制御性行列と可観測性行列を $\boldsymbol{M}_c$ と $\boldsymbol{M}_o$ とする．これらを改めて書き下しておくと…

$$\boldsymbol{M}_c = (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}, \ldots, \boldsymbol{A}^{N-1}\boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{M}_o = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{N-1} \end{pmatrix}$$

- このとき, 以下の定理が成り立つ.

- **定理.** 以下の 2 条件は等価である.

  C1) $\boldsymbol{M}_c$ はフルランク

  C2) $\forall\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix} = N$

- 定理の証明は後回しにして, 上記と双対な定理を述べる.

- 定理. 以下の 2 条件は等価である.

O1) $\boldsymbol{M}_o$ はフルランク

O2) $\forall\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix} = N$

- C2) を 可制御性に関する PBH テストと呼ぶ.
- O2) を 可観測性に関する PBH テストと呼ぶ.

- 双対性より，C1) と C2) の等価性と O1) と O2) の等価性については，どちらか一方を示せばよい．

- たとえば, C1) と C2) の等価性を先に示した場合, $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A})$ が可観測であることと $(\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{C}^T)$ が可制御であることは等価で, これと

$$\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A}^T - \lambda \boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{C}^T) = N$$

であることは等価となり, 最後の式を転置すると O2) が得られる.

- **C1) $\Rightarrow$ C2) の証明**

  ▷ 背理法による．$\boldsymbol{M}_c$ がフルランクのとき，ある $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\mathrm{rank}\left(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{B}\right) < N$$

  となったと仮定して矛盾を導く．

▷ すると, ある零でないベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し,

$$\boldsymbol{v}^T(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{0}^T.$$

よって この $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{v}^T, \quad \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}^T$$

を満たす.

▷ したがって, $k \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{B} = \lambda^k \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}^T$$

となるから,

$$\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{M}_c = \boldsymbol{0}^T$$

となり,

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{M}_c = N$$

という仮定に反する. ■

- **C2)** $\Rightarrow$ **C1)** の証明

  ▷ 背理法による.

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix} = N,$$

かつ

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{M}_c = R < N$$

と仮定して矛盾を導く.

▷ $\boldsymbol{M}_c$ が行列 $\boldsymbol{T}$ を左から乗ずることで階段行列に変換されているものとする. このとき, $\boldsymbol{T}\boldsymbol{M}_c$ の第 $R+1$ 行から第 N 行まではすべて零となる.

- ▷ $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}, \quad \tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}$ と定義する.
- ▷ $\tilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ と書ける ($\mathbf{0}$ は $N-R$ 行 M 列の零行列).

▷ $k \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1})^k(\boldsymbol{T}\boldsymbol{B}) = \tilde{\boldsymbol{A}}^k\tilde{\boldsymbol{B}}$$

だから, $\tilde{\boldsymbol{M}}_c$ を $(\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{B}})$ に対する可制御性行列とすると, $\tilde{\boldsymbol{M}}_c$ の第 $R+1$ 行から第 N 行まで (以下この部分を (何度も出て来るので, 簡単のために) $\tilde{\boldsymbol{M}}_c$ の下側と呼ぶ) はすべて零となる.

▷ $\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix}$ と書く. ただし, $\boldsymbol{A}_1$ は $\tilde{\boldsymbol{A}}$ の 左上の $R \times R$ 行列で, 残りの行列は適合する次元を持つように調整されているものとする.

$\triangleright$ $\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{0}$ となることを示す.

$\diamond$ $\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix}$ で, $\tilde{\boldsymbol{M}}_c$ の下側はすべて零だから, $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{0}$ でなければならない. よって,

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

である.

◇ $k-1 \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\tilde{\boldsymbol{A}}^{k-1}\tilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{k-1}\boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

となることが示されていたものとする.

すると,

$$\tilde{\boldsymbol{A}}^k \tilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^k \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{A}_3 \boldsymbol{A}_1^{k-1} \boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix}$$

で, $\tilde{\boldsymbol{M}}_c$ の下側はすべて零だから,

$$\boldsymbol{A}_3 \boldsymbol{A}_1^{k-1} \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{0}$$

である.

◇ 以上によって,

$$\boldsymbol{A}_3(\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_1^{N-1}\boldsymbol{B}_1) = \boldsymbol{0}$$

となるが, 一方で

$$\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_1^{N-1}\boldsymbol{B}_1) = R$$

なので, $\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{0}$ でなければならない.

▷ $\boldsymbol{A}_3 = \mathbf{0}$ だから, $\tilde{\boldsymbol{A}}$ は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix}$$

という形になる.

▷ $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ を, ある $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{A}_4 = \lambda \boldsymbol{v}^T$$

となる $N - R$ 次のベクトルとする.

▷ $\mathbf{0}$ を R 次の零ベクトルとすると,

$$(\mathbf{0}^T, \boldsymbol{v}^T)\tilde{\boldsymbol{B}} = \mathbf{0}^T$$

かつ

$$(\mathbf{0}^T, \boldsymbol{v}^T)\tilde{\boldsymbol{A}} = (\mathbf{0}, \lambda \boldsymbol{v}^T)$$

である.

- ▷ よって,

$$(\mathbf{0}^T, \boldsymbol{v}^T)\begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}} - \lambda \boldsymbol{I} & \tilde{\boldsymbol{B}} \end{pmatrix} = \mathbf{0}^T$$

であり, したがって

$$\begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}} - \lambda \boldsymbol{I} & \tilde{\boldsymbol{B}} \end{pmatrix}$$

はフルランクではない.

▷ ランクは 行列に正則行列を乗じても不変だから,

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{A}}-\lambda\boldsymbol{I} & \tilde{\boldsymbol{B}}\end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{A}}-\lambda\boldsymbol{I} & \tilde{\boldsymbol{B}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\right) \\
&\qquad\qquad = \operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

▷ よって

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

はフルランクではない. ■

最小次元オブザーバ

- Luenberger オブザーバは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(n+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n), \\ \boldsymbol{y}(n) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) \end{aligned} \qquad (\star)$$

  の状態を推定するために上記と同一の次元の動的システムを用いる．このため，同一次元オブザーバとも呼ばれる．

- これに対し，一定の条件の下で，必ずしも上記と同一とは限らない次元の動的システム

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w}(n+1) &= \boldsymbol{G}\boldsymbol{w}(n) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{y}(n) + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(n) \\
\hat{\boldsymbol{x}}(n) &= \boldsymbol{E}\boldsymbol{w}(n) + \boldsymbol{J}\boldsymbol{y}(n)
\end{aligned}
\qquad (\bigstar)
$$

によって状態推定が可能であることが示せる．上述の一定の条件について述べる．

- **定理.** (★) が (☆) に対するオブザーバとなるための十分条件は, 行列 $\boldsymbol{G}$ が安定で, かつ次の条件を満たす行列 $\boldsymbol{T}$ が存在することである.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{TA} - \boldsymbol{GT} &= \boldsymbol{FC} \\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{TB} \\ \boldsymbol{ET} + \boldsymbol{JC} &= \boldsymbol{I}. \end{aligned} \qquad (♪)$$

- 証明.
  - ▷ $\boldsymbol{e}(n) = \boldsymbol{w}(n) - \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}(n)$ とおく.
  - ▷ (♪) を使うと, 次式が得られる ($\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n)$ に注意).

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}(n+1) &= (\boldsymbol{G}\boldsymbol{w}(n) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(n)) \\
&\quad - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n)) \\
&= \boldsymbol{G}\boldsymbol{w}(n) + (\boldsymbol{F}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(n) \\
&\quad + (\boldsymbol{H} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}(n) \\
&= \boldsymbol{G}\boldsymbol{w}(n) - \boldsymbol{G}\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}(n) \\
&= \boldsymbol{G}\boldsymbol{e}(n)
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{G}$ は安定だから, $\boldsymbol{e}(n) \to \mathbf{0}(n \to \infty)$ である.

▷ 一方,

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}(n) &= \boldsymbol{E}\boldsymbol{w}(n) + \boldsymbol{J}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) \\ &= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{e}(n) + \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}(n)) + \boldsymbol{J}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) \\ &= \boldsymbol{E}\boldsymbol{e}(n) + \boldsymbol{x}(n)\end{aligned}$$

となり, $\boldsymbol{e}(n) \to \mathbf{0} (n \to \infty)$ であることは既に示されているから $\hat{\boldsymbol{x}}(n) \to \boldsymbol{x}(n)$ $(n \to \infty)$ である. ■

- (★) は, 可観測なシステムに対する Luenberger オブザーバを含んだ形になっている.

- これを見るために, まず $\boldsymbol{w}(n)$ を $\boldsymbol{x}(n)$ と同一次元に取り, 次に $\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{FC}$ が安定となるように取る. そして, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}$ とする. 最小次元オブザーバで成り立たなければならない式にこれらを代入すると…

成り立つべき等式	この場合
$\boldsymbol{TA - GT = FC}$ $\boldsymbol{H = TB}$ $\boldsymbol{ET + JC = I}$	$\boldsymbol{A - (A - FC) = FC}$ $\boldsymbol{B = B}$ $\boldsymbol{I + 0 = I}$

- 上記のようになり, 確かに最小次元オブザーバがLuenberger オブザーバを含んだ形になっていることが確認できる.

- 上述の結果を用いると, システム (☆) (ただしシステムは N 次で M 入力 P 出力, 可観測で, 行列 $\boldsymbol{C}$ はフルランクであると仮定する) に対し, N より次元の低いオブザーバを構成することができる.

- この手法の説明のためには, (☆) にあらかじめ座標変換を施しておく．座標変換は可観測性に影響を与えないことに注意する.

- $(N-P)\times P$ 次の行列 $\boldsymbol{U}$ を,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{U} \end{pmatrix} =: \boldsymbol{V}$$

が正則となるように取り,

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{\xi}(n) = (\boldsymbol{\xi}_1^T(n), \boldsymbol{\xi}_2^T(n))^T$$

とする.

- $\boldsymbol{\xi}_1(n)$ は $\boldsymbol{\xi}(n)$ の 前半の第 P 個の成分から成るベクトルで, $\boldsymbol{\xi}_2(n)$ は残った成分から成るベクトルである. 定義より, $\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{\xi}_1(n)$ である.

- 座標変換後のシステムは, 次のような形になる. $\boldsymbol{S}_i$ $(1 \le i \le 4)$ および $\boldsymbol{K}_i$ $(1 \le i \le 2)$ は $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{T}$ から定まるが, 具体的な形は重要でないので述べない.

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_1(n+1) \\ \boldsymbol{\xi}_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{S}_1 & \boldsymbol{S}_2 \\ \boldsymbol{S}_3 & \boldsymbol{S}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_1(n) \\ \boldsymbol{\xi}_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_1 \\ \boldsymbol{K}_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(n) \qquad (\blacklozenge)
$$

$$
\boldsymbol{y}(n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_1(n) \\ \boldsymbol{\xi}_2(n) \end{pmatrix}.
$$

- (◆) は可観測だから, PBH テストにより,

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{rank} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{S}_1 - \lambda \boldsymbol{I} & \boldsymbol{S}_2 \\ \boldsymbol{S}_3 & \boldsymbol{S}_4 - \lambda \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = N$$

である.

- したがって，

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \boldsymbol{S}_2 \\ \boldsymbol{S}_4 - \lambda \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = N - P$$

である．

- よって, $(\boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_4)$ は可観測で, ゆえに $\boldsymbol{L}$ を調整することで $\boldsymbol{S}_4 - \boldsymbol{L}\boldsymbol{S}_2$ の固有値を任意に指定できる.

- 以下のようにすることで, (♪) を満たす一連の行列を作ることができ, したがってオブザーバが構成可能である．ただし, $\boldsymbol{I}_k$ は k 次の単位行列, $\mathbf{0}_{i\times j}$ は $i \times j$ 次の零行列を表すものとする．また, $\bar{N} = N - R$ とおく．

- これから述べる構成によるオブザーバを**最小次元オブザーバ**と呼ぶ (英語では **reduced order observer**).

- **定理.**　以下の手順によりオブザーバを構成することができる.

1. $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{S}_4 - \boldsymbol{L}\boldsymbol{S}_2$ が安定となるように行列 $\boldsymbol{L}$ を選ぶ.
2. $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{L} & \boldsymbol{I}_{\bar{N}} \end{pmatrix}$,
$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}_{R\times\bar{N}} \\ \boldsymbol{I}_{\bar{N}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_R \\ \boldsymbol{L} \end{pmatrix}$ とする.

3. $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_3$ とする.
4. $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{K}_2 - \boldsymbol{L}\boldsymbol{K}_1$ とする.

- **証明.** 　先の定理の (♪) を順に確認すればよい.
  - $\triangleright$ $\boldsymbol{G}$ を安定にできることは $(\boldsymbol{S}_4, \boldsymbol{S}_2)$ の可観測性による.

▷ $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{I}_R \quad \mathbf{0}_{R\times\bar{N}})$ であることに注意し，(♪) の第 3 式を確認する．(♪) の第 3 式左辺に各行列の定義を代入すると…

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{R\times\bar{N}} \\ \boldsymbol{I}_{\bar{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\boldsymbol{L} & \boldsymbol{I}_{\bar{N}} \end{pmatrix} \\
&\qquad + \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_R \\ \boldsymbol{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_R & \mathbf{0}_{R\times\bar{N}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{R\times R} & \mathbf{0}_{R\times\bar{N}} \\ -\boldsymbol{L} & \boldsymbol{I}_{\bar{N}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_R & \mathbf{0}_{R\times\bar{N}} \\ \boldsymbol{L} & \mathbf{0}_{\bar{N}\times\bar{N}} \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{I}_N
\end{aligned}
$$

上記は (♪) 第 3 式の右辺と一致する.

▷ (♪) の第 1 式に各行列の定義を代入し(状態方程式が (◆) に変わっていることに注意), 次の方程式を $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{\bar{N} \times R}$ について解く.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -\boldsymbol{L} & \boldsymbol{I}_{\bar{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{S}_1 & \boldsymbol{S}_2 \\ \boldsymbol{S}_3 & \boldsymbol{S}_4 \end{pmatrix} - \boldsymbol{G} \begin{pmatrix} -\boldsymbol{L} & \boldsymbol{I}_{\bar{N}} \end{pmatrix} \\
= \boldsymbol{F} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_R & \boldsymbol{0}_{R \times \bar{N}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

上記を単純化すると,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -\boldsymbol{L}\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_3 & -\boldsymbol{L}\boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_4 \end{pmatrix} \\
+ \begin{pmatrix} \boldsymbol{G}\boldsymbol{L} & -\boldsymbol{G} \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} & \mathbf{0}_{\bar{N}\times\bar{N}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

となる.

$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{S}_4 - \boldsymbol{L}\boldsymbol{S}_2$ と定義されていたから, 上記右側の成分に係る等式は成立している. 左側の成分に係る等式が求めるべきであった

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_3$$

である.

▷ (♪) の第 2 式に各行列の定義を代入すると (状態方程式が (◆) に変わっていることに注意), 次式が得られる.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \begin{pmatrix} -\boldsymbol{L} & \boldsymbol{I}_{\bar{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_1 \\ \boldsymbol{K}_2 \end{pmatrix} \\
&= -\boldsymbol{L}\boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2.
\end{aligned}
$$

- 最小次元オブザーバは大抵の教科書に載っている有名なオブザーバではあるが, 応用上はあまり使われない.

これは, 多くの対象では $\boldsymbol{y}(n)$ の次元に比べて $\boldsymbol{x}(n)$ の次元はずっと大きいのでこの構成による次数低減の効果は小さく, かつ同一次元オブザーバが持っている低域通過フィルタとしての特性 (観測雑音の影響を低減できる) が失わるからであると思われる.

代数的演算による状態の復元

- 離散時間システムでは，連続時間システムと異なり，代数的な計算によって，入力と出力の過去の系列を用いて状態を計算することができる．これは，状態推定誤差が時間とともに零に減衰する通常のオブザーバや，有限の遅延の後に状態推定誤差が零となる有限整定オブザーバとは異なる．

- 上述のオブザーバは, システムの数学モデルに含まれるモデル化誤差に対して脆弱であるため, 線形システムではまず利用されることはないが, 状態推定そのものが困難な非線形システムではこれの非線形版が利用されることがある. ここでは, 線形時不変システムにおける状態の計算法を述べる.

- 以下の可観測な線形時不変システムを考える:

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n)$$
$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n).$$

- 可観測性行列

$$(\boldsymbol{C}^T, \ldots, (\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{N-1})^T)^T$$

の構造に合わせて, $\boldsymbol{x}(n-N+1)$ と入力および出力の系列の関係を考える.

- 以下の記号を用いる:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}(n-N+1,n) \\
&\qquad\qquad = (\boldsymbol{y}^T(n-N+1),\ldots,\boldsymbol{y}^T(n))^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}(n-N+1,n-1) \\
&\quad = (\boldsymbol{u}^T(n-N+1),\ldots,\boldsymbol{u}^T(n-1))^T
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \\ \dots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{N-1} \end{pmatrix}$$

- 状態方程式を使うと, 次ページの一連の等式が得られる ($\boldsymbol{L}_j$ は適切な有限次元線形作用素で, 帰納的に計算される)

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}(n-N+1) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n-N+1) \\
&\boldsymbol{y}(n-N+2) \\
&\qquad = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n-N+1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n-N+1) \\
&\qquad =: \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n-N+1) \\
&\qquad\quad + \boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{u}(n-N+1))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(n-N+3) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}(n-N+1) \\
&\quad + \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n-N+2) \\
&\qquad + \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n-N+1) \\
&=: \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}(n-N+1) \\
&\qquad + \boldsymbol{L}_3(\boldsymbol{u}(n-N+1), \boldsymbol{u}(n-N+2)) \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{N-1}\boldsymbol{x}(n-N+1) \\
+ \boldsymbol{L}_N(\boldsymbol{u}(n-N+1), \ldots, \boldsymbol{u}(n-1))
\end{aligned}
$$

- これらをまとめると, 次式が得られる.

$$\boldsymbol{y}(n-N+1,n) = \boldsymbol{M}_o\boldsymbol{x}(n-N+1) \\ + \boldsymbol{L}\boldsymbol{u}(n-N+1,n-1).$$

- $\boldsymbol{M}_o$ は フルランク なので,

$$\boldsymbol{M}_o \boldsymbol{x}(n-N+1) = \boldsymbol{y}(n-N+1, n) \\ - \boldsymbol{L}\boldsymbol{u}(n-N+1, n-1).$$

を $\boldsymbol{x}(n-N+1)$ について解くことで, 状態 (推定値) が得られる.

- 上記の解を $\boldsymbol{\xi}(n-N+1)$ とする.
- 雑音等がなければ

$$\boldsymbol{\xi}(n-N+1) = \boldsymbol{x}(n-N+1)$$

である.

- 上記を用い,

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\xi}(n-N+2) \\
&\quad = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}(n-N+1) + \boldsymbol{u}(n-N+1), \\
&\boldsymbol{\xi}(n-N+3) \\
&\quad = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}(n-N+2) + \boldsymbol{u}(n-N+2), \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

という一連の式を順に解いていけば…

- CPU 時間を除き, 瞬間的に 真の状態 $\boldsymbol{x}(n)$ が得られる. ただし, 上記はモデル化誤差や雑音に極めて弱く, 応用上は使いにくい.

Kalman フィルタ

- Kalman フィルタは 数学的に言えば Luenberger オブザーバと ほぼ同じものであるが, Luenberger オブザーバが確定系を対象としていたのに対し, Kalman フィルタは確率系を 対象としていたため, 2 種類の名前が併存している.

- **定義.** 確率的外乱を受けた線形時変システムを対象とし，その状態推定問題に対し，ある評価関数に関する最良の推定値を与えるフィルタを **Kalman フィルタ** と呼ぶ.

- Kalman フィルタは Luenberger オブザーバと類似した構造を持つが, オブザーバゲインは時変になる． 連続時間版と離散時間版がある.

- Kalman フィルタを 線形時不変システムに使った場合にも, オブザーバゲインは時変になるが, 一定の条件のもとで, このゲインは定数行列に収束する. その収束した値を用いた 状態推定器 を **定常 Kalman フィルタ** と呼ぶ.

- 定常 Kalman フィルタの構造は Luenberger オブザーバと同一であるが, オブザーバゲインが最適化問題を解くことによって決定される点が異なる.

- Kalman フィルタという言葉は Luenberger オブザーバと同じ意味で用いられることもある.

- Kalman フィルタは 確率システムにおける直交射影の原理に基づいて導出されるのであるが, この講義では, 数学的な議論を省略して, Kalman フィルタに関する重要な事実をいくつか述べる.

時変型の Kalman フィルタ

- 以下の線形時変システムを考える.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(n+1) &= \boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}(n)\boldsymbol{u}(n) \\ &\quad + \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{w}(n), \qquad (☆) \\ \boldsymbol{y}(n) &= \boldsymbol{C}(n)\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{v}(n)\end{aligned}$$

- $\boldsymbol{x}(0)$ は期待値 $\bar{\boldsymbol{x}}(0)$ で共分散 $\boldsymbol{P}_{x0}$，$\boldsymbol{w}(n)$ と $\boldsymbol{v}(n)$ は期待値零で共分散がそれぞれ $\boldsymbol{Q}(n)$ と $\boldsymbol{R}(n)$ の互いに無相関な白色雑音で, $\boldsymbol{x}(0)$ とも無相関であると仮定する．また, $\boldsymbol{R}(n)$ は正定とする.

- このシステムに対する時変型 Kalman のアルゴリズムは次ページの通りである.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{-}(n+1) &= \boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{A}^{T}(n) \\ &\quad + \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{Q}(n)\boldsymbol{G}^{T}(n) \\ \hat{\boldsymbol{x}}^{-}(n+1) &= \boldsymbol{A}(n)\hat{\boldsymbol{x}}(n) + \boldsymbol{B}(n)\boldsymbol{u}(n)\end{aligned}$$

(次ページに続く)

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}(n+1) = \\
&\quad \Bigg(\left(\boldsymbol{P}^{-}(n+1)\right)^{-1} \\
&\qquad\qquad + \boldsymbol{C}^{T}(n+1)\boldsymbol{R}^{-1}(n+1)\boldsymbol{C}(n+1) \Bigg)^{-1}
\end{aligned}
$$

(次ページに続く)

$$
\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{x}}(n+1) \\
&= \hat{\boldsymbol{x}}^{-}(n+1) + \boldsymbol{P}(n+1)\boldsymbol{C}^{T}(n+1)\boldsymbol{R}^{-1}(n+1) \\
&\qquad \times \left(\boldsymbol{y}(n+1) - \boldsymbol{C}(n+1)\hat{\boldsymbol{x}}^{-}(n+1)\right)
\end{aligned}
$$

- 時変型の Kalman フィルタは, まず (☆) と同一のモデル (雑音を除く) から状態推定値を生成し, 次に Output Injection によってそれを更新するという, 2 段構えの構成になっている. アルゴリズムの実行のために, 雑音の共分散の情報が必要になる.

定常 Kalman フィルタ

- 以下の線形時不変システムを考える.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(n+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n) + \boldsymbol{w}(n) \\
\boldsymbol{y}(n) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{v}(n)
\end{aligned}
\qquad (\bigstar)
$$

- $\boldsymbol{w}(n)$ と $\boldsymbol{v}(n)$ は期待値零の白色雑音で, 任意の n に対し,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{w}(n) \\ \boldsymbol{v}(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}^T(n) & \boldsymbol{v}^T(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}^T & \boldsymbol{R} \end{pmatrix}$$

となり, 行列 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}^T & \boldsymbol{R} \end{pmatrix}$ は正定半対称で, かつ $\boldsymbol{R}$ は正定とする.

- $\boldsymbol{Q}$ は正定半対称なので, 直交行列 $\boldsymbol{U}$ によって対角行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ に変換され, その対角要素は非負である. $\boldsymbol{\Lambda}$ の対角要素の正の平方根を取ったものを $\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}$ と書く. $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^T$ となっているとき, $\sqrt{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{U}\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}$ と定義する.

- $(\bigstar)$ が可観測かつ $(\boldsymbol{A}, \sqrt{\boldsymbol{Q}})$ が可制御であると仮定する．このとき, $(\bigstar)$ に対する Kalman フィルタの定常解 ($\boldsymbol{P}(n+1)$ などが収束した後の形) は, 次のように, Luenberger オブザーバと同様の形になる．また, 状態推定誤差に関する動的システムは漸近安定になる．

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{x}}(n+1) &= \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n) \\
&\quad + \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{y}(n) - \hat{\boldsymbol{y}}(n)\right) \\
\hat{\boldsymbol{y}}(n) &= \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(n)
\end{aligned}
$$

ただし,

$$\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{S} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}^T)(\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{R})^{-1}$$

で, $\boldsymbol{R}$ は次の行列に関する方程式 (**代数的 Riccati 方程式と呼ばれる**の正定対称解である.

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}$$
$$-(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}^T)(\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}^T+\boldsymbol{R})^{-1}(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}^T)^T$$

参考文献

- M. Verhaegan and Verdult, Filtering and System Identification, Cambridge University Press, 2007.
- 前田, 線形システム, 朝倉書店, 2001.
- F. L. Lewis, L. L. Xie and D. Popa, Optimal and Robust Estimation, 2/e, CRC Press, 2008.