ディジタル制御 第6回

伝達関数に基づく ディジタル制御系の設計 (1)

- 伝達関数に基づくディジタル制御系の設計は、
 古典制御に由来するものである.
- この設計法はシステムの周波数応答を用いるので、今回の講義では、まず、離散時間システムの周波数応答について説明する.
- 続いて、フィードバックシステムにとって重要な概念である、well-posednessと内部安定性について述べる.

 ● 後で述べるように、古典制御的な制御設計で は連続時間の方が離散時間よりもノウハウが 蓄積されている関係で、まず連続時間で補償 器を設計し、続いてそれを離散化する、という 方法が取られることが多い. 連続時間におけ る古典制御的な制御系設計は制御工学の守備 範囲なので, 今回の講義ではこれについては 当面述べず,離散化の方法に絞って解説する.

今回の講義の最後の話題として、 z 領域における制御系設計について簡単に触れる.

システムの周波数応答 離散時間では…

 1入力1出力の線形時不変でBIBO安定な離 散時間システムに対し、そのインパルス応答 の離散時間フーリエ変換、あるいはその伝達 関数の変数zにe^{jw}を代入したものを、システ ムの周波数応答あるいは周波数特性と呼ぶ。



1入力1出力の線形時不変でBIBO安定な連続時間システムに対し、そのインパルス応答のフーリエ変換、あるいはその伝達関数の変数sにjwを代入したものを、システムの周波数応答あるいは周波数特性と呼ぶ.

- 以下では、システムは因果的かつ BIBO 安定 で、その伝達関数を G(z)、インパルス応答を $g = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ とする、片側 z 変換の定義によ り、 $G(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} g(n) z^{-n}$ である.
- システムに印加される入力 u を次のように 取る.

$$u(n) = e^{j\omega n}.$$

システムの出力をyとすると…

$$\begin{split} y(n) &= \sum_{m \in \mathbb{N}} g(m) e^{j\omega(n-m)} \\ &= \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} g(m) e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} \\ &= \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} g(m) e^{-j\omega m} \right) u(n) \end{split}$$

以上で見たように、入力に次の複素数が乗じられている。

 $\sum g(m)e^{-j\omega m}$ $m \in \mathbb{N}$

• これは, システムのインパルス応答を離散時 間フーリエ変換したものの角周波数 ω におけ る値であり, かつG(z)において $z = e^{j\omega}$ とし たものである.

- システムの周波数応答は、システムが BIBO 安定であれば定義できるが、BIBO 安定でない場合には定義できるとは限らない。
- 独立変数が周波数の場合も、角周波数の場合
 も、「周波数応答」という言葉が用いられる.
- 周波数応答と周波数特性という言葉は同義.

- G(e^{jw})の絶対値を A(e^{jw})と書き、システムの振幅周波数特性あるいは振幅特性という.
- G(e^{jω})の偏角をθ(e^{jω})と書き,システムの位
 相周波数特性あるいは位相特性という.

ナイキスト周波数

以下では、サンプリング周期が一定の離散時間線形時不変システムを検討の対象とし、サンプリング周期が周波数応答の決定にどのように影響するかを調べる。

システムのサンプリング周期を*T_s*, サンプリング周波数を*f_s*, サンプリング角周波数をω_s
 とする.

$$f_s = 1/T_s$$
$$\omega_s = 2\pi f_s$$

である.

サンプリングの影響を明示するために、時刻
 を n から nT_s に変更する:

$$u(nT_s) = e^{j\omega nT_s}$$

● *e^{jωnTs}* で正弦関数と余弦関数を表現したいので,正の角周波数と負の角周波数が必要.

信号の角周波数をωとすると、

$$\omega - 2\pi k/T_s \in (-\pi/T_s, \pi/T_s]$$

となる $k \in \mathbb{Z}$ が一意的に定まる. この kに対し,

$$\omega_* = \omega - 2\pi k / T_s$$

とおく.

• $e^{j\theta}$ は周期 2π の周期関数だから,

$$e^{j\omega_*nT_s} = e^{j(\omega - 2\pi k/T_s)nT_s} = e^{j\omega nT_s}$$

となる.よって、
$$\omega_* \in (-\pi/T_s, \pi/T_s]$$
に対し、

$$\{\omega_* + 2\pi k/T_s\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

という角周波数の信号は、すべて角周波数 ω_* の信号として処理される.

上記の結果として、ディジタル制御されたシステムでは、サンプル点のあいだで高周波の振動が発生しているにもかかわらず制御システムがこれを検知および抑制することができない、ということがあり得る.

このような現象の有無は、状態空間表現されたシステムではサンプル点間の応答波形を行列の指数関数によって復元することで確認できる他、拡張 z 変換という方法でも調べることができる. さらに、シミュレータ上でサンプリング周期を変更することでも確認できる.

• 信号 u が周波数 $[-f_B, f_B]$ の範囲外では零に なっているものする (このような信号を帯域 **制限された信号**と呼ぶ). このとき, この信号 がサンプリング周期一定の離散時間システム によって正しく処理されるためには, $2\pi f_B \leq \pi/T_s$, すなわち $f_s = 1/T_s$ に対し,

 $2f_B \leq f_s$

でなければならない.

• 以上により, 周波数 $[-f_B, f_B]$ に帯域制限され た信号 u を離散時間システムで正しく処理す るためには, サンプリング周波数を $2f_B \leq f_s$ を満たすように (十分高く) 取らなければな らない. $2f_B$ を信号 u の Nyquist 周波数と 呼ぶ.

Well-posedness と内部安定性

フィードバックシステムが工学的に意味を持つためには、そのシステムが一意的な解(応答)を持たなければならない.まず、一般的なフィードバックシステムに対して、この条件(well-posed と呼ぶ)を求める(典拠は前田:線形システム、朝倉書店、2001).

以下の図のように伝達関数が結合された離散
 時間のフィードバックシステムを考える.



• $Y_1(z) = G_1(z)(U_1(z) - Y_2(z)),$ $Y_2(z) = G_2(z)(U_2(z) + Y_1(z))$ だから、これら を纏めると、

$$\begin{pmatrix} 1 & G_1(z) \\ -G_2(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(z)U_1(z) \\ G_2(z)U_2(z) \end{pmatrix}$$

- このフィードバックシステムが意味を持つための必要十分条件は、左辺の行列が可逆であること.
- そのためには, $1 + G_1(z)G_2(z)$ が零でない有 理式となることが必要かつ十分.

- このように、解の存在と一意性が保証された フィードバックシステムを well-posed であ ると言う.
- フィードバックシステムを設計する際には、 まず第一に、それが well-posed であるように しなければならない.

- 以下の議論で、多くの場合、フィードバック システムが well-posed であることは、暗黙の うちに仮定される.
- 設計者が不用意にフィードバックシステムを 作成した場合, それが well-posed とならない こともあり得るので, 注意を要する.

 ● 制御システムでは、多くの場合、G₁(z) およ $\overline{G}_2(z)$ をプロパーな伝達関数である.この ような状況下で、フィードバックシステムが well-posed であることを, $1+G_1(z)G_2(z)$ が零 でない有理式で、それに加えて $(U_1(z), U_2(z))$ から $(Y_1(z), Y_2(z))$ への伝達関数行列のすべ ての要素がプロパーであることと定義する場 合もある.

 上記に加えて、その伝達関数行列のすべての 要素が安定であるとき、フィードバックシス テムは内部安定であると呼ぶ。 この内部安定性の定義はロバスト制御の分野 で標準的.たとえば藤井:ロバスト制御,コ ロナ社, 2001, 中野, 松尾, ディジタル制御, 昭 晃堂, 2001, W. S. Levine (ed): The Control Handbook, CRC Press, 2011 など. 状態空 間表現されたシステムを前提とし,漸近安定 と内部安定を同義語として用いる流儀もある が,必ずしも一般的ではない.

これを一般化して,(線形時不変)フィードバックシステムが well-posed であるとは そのシステムが一意解を持つことを言い,内部安定であるとはそのシステムの構成要素となる 伝達関数がすべて安定であることをいう.

 多くの教科書で, well-posedness や 内部安定 性は, 特定の構造のフィードバックシステム に対して定義されているので注意. 先と同様 に, well-posed の定義に システムを構成要素 となる伝達関数がすべてプロパーであること を含む場合もある. 以下のフィードバックシステムは well-posed で、G₁(z) および G₂(z) は プロパーであると いう前提のもとで、そのすべての構成要素が プロパーかつ内部安定となる条件を調べる.





 $(U_1(z), U_2(z))$

から

 $(Y_1(z), Y_2(z))$

への伝達関数行列は、以下のようになる.



この伝達関数行列のすべての要素がプロパー かつ安定となるための条件を知りたい. 定理 先の図のフィードバックシステムが well-posed であるとき、それに対応する伝達 関数行列の各要素がプロパーであるための必 要十分条件は、

 $\lim (1 + G_1(z)G_2(z)) \neq 0$

となることである.


$$\gamma_i = \lim_{z \to \infty} G_i(z) \quad (i = 1, 2)$$

とする.

(⇒)の証明 上記の伝達関数行列の各要素が プロパーであると仮定する.すると,それら の $z \to \infty$ としたときの値は有限.よって,特 に, $\gamma_1\gamma_2/(1+\gamma_1\gamma_2) < \infty$.したがって,

$$1 - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(1 + \gamma_1 \gamma_2)} = \frac{1}{1 + \gamma_1 \gamma_2}$$

は有限. ゆえに, $1 + \gamma_1 \gamma_2 \neq 0$ である.

(\Leftarrow)の証明 $1 + \gamma_1 \gamma_2 \neq 0$ と仮定する.フィー ドバックシステムは well-posed であると仮定 されていたから, $1+G_1(z)G_2(z)$ は零でない有 理式で、プロパーである. 仮に $1+G_1(z)G_2(z)$ が 厳密にプロパーであれば, $1 + \gamma_1 \gamma_2 = 0$ と なり、仮定に矛盾.よって、 $1 + G_1(z)G_2(z)$ の分母多項式と分子多項式の次数は同一であ η , $1/(1+G_1(z)G_2(z))$ もプロパー. したがっ て,上記の伝達関数行列の各要素はプロパー.

- 続いて、内部安定性について考える。
- 次ページの3個の伝達関数がすべて安定となるための条件を求めたい.

$$G_A(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}$$
$$G_B(z) = \frac{G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}$$
$$G_C(z) = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}$$

• $G_i(z) = N_i(z)/D_i(z)$ で, $N_i(z)$ と $D_i(z)$ は既 約な多項式とすると (i = 1, 2): 先の式にこ れらを代入すると, 次ページの式を得る.

$$G_A(z) = \frac{N_1(z)D_2(z)}{D_1(z)D_2(z) + N_1(z)N_2(z)}$$
$$G_B(z) = \frac{N_2(z)D_1(z)}{D_1(z)D_2(z) + N_1(z)N_2(z)}$$
$$G_C(z) = \frac{N_1(z)N_2(z)}{D_1(z)D_2(z) + N_1(z)N_2(z)}$$

• これらの内部安定性について考える.

フィードバックシステム が 安定であるため には、多項式

$D_1(z)D_2(z) + N_1(z)N_2(z)$

が安定 (すなわち すべての零点が複素単位 円の内部にある) であることが十分条件であ るが…

• 実は、これは必要条件にもなっている.

必要性の証明:

- ▷ G_A(z), G_B(z), G_C(z) が安定であり, 一 方で多項式 D₁(z)D₂(z)+N₁(z)N₂(z) が 安定でないと仮定して, 矛盾を導く.
- ▷ $\gamma \in D_1(z)D_2(z) + N_1(z)N_2(z)$ の不安定 零点とする.

▷ $D_1(\gamma)D_2(\gamma) + N_1(\gamma)N_2(\gamma) = 0$ である が、 $G_A(z)$ 、 $G_B(z)$ 、 $G_C(z)$ はすべて安定 だから、γはこれらの極とならない. これ は、 $G_A(z)$ 、 $G_B(z)$ および $G_C(z)$ の分子 多項式の零点が、分母多項式 $D_1(z)D_2(z)$ + $N_1(z)N_2(z)$ の不安定零点をキャンセル していることを意味する.

▷ よって,

 $N_1(\gamma)D_2(\gamma) = 0,$ $N_2(\gamma)D_1(\gamma) = 0,$ $N_1(\gamma)N_2(\gamma) = 0.$

▷ $D_1(\gamma)D_2(\gamma) + N_1(\gamma)N_2(\gamma) = 0$ でもあっ たから、

 $D_1(\gamma)D_2(\gamma) = 0$



▷ $N_1(\gamma) = 0$ と仮定すると, $N_1(z)$ と $D_1(z)$ は互いに素だったから, $D_1(\gamma) \neq 0$.ま た, $N_2(\gamma)D_1(\gamma) = 0$ より, $N_2(\gamma) = 0$. $N_2(z)$ と $D_2(z)$ は互いに素だったから, $D_2(\gamma) \neq 0$. したがって,

 $D_1(\gamma)D_2(\gamma) \neq 0$

となり矛盾.

▷ $D_2(\gamma) = 0$ と仮定すると, $N_2(z)$ と $D_2(z)$ は互いに素だったから, $N_2(\gamma) \neq 0$.ま た, $N_2(\gamma)D_1(\gamma) = 0$ より, $D_1(\gamma) = 0$. $N_1(z)$ と $D_1(z)$ は互いに素だったから, $N_1(\gamma) \neq 0$.したがって,

 $N_1(\gamma)N_2(\gamma) \neq 0$

となり矛盾.

Well-posed でないシステムの例

 フィードバックシステムが well-posed でな い例として、G₁(z) = 1、G₂(z) = -1 (いず れも定数)の場合を考える.このとき、1 + G₁(z)G₂(z) = 0である.



先の例では, U₁(z) と U₂(z) は独立な入力として設定されているのだが, 入出力関係を計算してみると,

$$Y_1(z) = U_1(z) - Y_2(z)$$
$$Y_2(z) = -Y_1(z) - U_2(z)$$

となる.

よって、

 $U_1(z) = U_2(z) = Y_1(z) + Y_2(z)$

となり, $U_1(z) = U_2(z)$ という (想定外の) 束縛 条件が発生し, $Y_1(z)$ と $Y_2(z)$ は不定 ($U_1(z) = U_2(z) = Y_1(z) + Y_2(z)$ を満たせば何でもよ い) という結果になってしまう.



Well-posed の確認

• $G_1(z) \ge G_2(z)$ の少なくとも一方が厳密にプロパーである場合には, $G_1(z)G_2(z)$ は厳密にプロパーで, したがって $1 + G_1(z)G_2(z)$ が零になることはないから, フィードバックシステムが well-posed であることは自明.

一方で、これらがいずれも厳密にプロパーでないときには、どこかの段階でフィードバックシステムが well-posed であることを確認する必要がある.

ディジタル制御系の設計法の分類

 ディジタル制御系の伝統的な設計法は,連続時間制御対象に対して設計された 連続時間 補償器を離散化する方法(アナログ補償器の ディジタル実装)と,離散化した制御対象に 対して離散時間補償器を設計する方法に大 別される. 1990年代以降に確立された,入力と出力に関するサンプル点間を含む波形全体の対応を調べる連続リフティングと呼ばれる手法もあるが,入門向きではない.

 これとは別の観点であるが、伝達関数表現と 周波数応答に基づく古典制御的な設計法、状態空間表現に基づく現代制御的な設計法、伝 達関数表現と状態空間表現を併用する H_∞制 御などのいわゆるアバンスト制御的な設計法 に分類することもできる. ディジタル制御の利点のひとつは 複雑な制 御器を容易に利用可能なことであり,単純な 構造の古典制御による制御器に拘泥する理由 はあまりない.とはいえ,応用上は古典制御 的な設計法は重要であるので,この講義では 簡単に触れる.

アナログ補償器のディジタル実装

• 古典制御は 伝統的には, 連続時間システムを 対象としていた. ディジタル制御でも直接古 典制御的な制御系設計は可能であるが、アナ ログ制御にノウハウなどがより多く蓄積され ている関係で、まずアナログ補償器を設計し、 続いてそれを離散化した ディジタル補償器 を実装する、という方法がしばしば取られる.

- 離散化の方法は様々であるが、一般には離散
 化誤差を伴うため、多くの場合、離散化後の
 補償器に関する性能評価(とくに安定性解析)
 や再設計が必要.
- なお,補償器,制御器,コントローラは同義.

 設計された補償器が C_c(s) という伝達関数の 形で与えられているとき,これを離散化する 典型的な方法は:

- 1. 前進差分
- 2. 後退差分
- 3. 極・零点のマッチング
- 4. 双一次変換
- 5. 状態空間表現に基づく離散化

• 先に述べた方法について順に説明する.

 前進差分: 補償器の伝達関数を入出力微分 方程式に直し,

$$\frac{dy}{dt} \simeq (y(n+1) - y(n))/T_s$$

と近似する. 高次の微分の近似には上記の近 似を再帰的に用いる. • 後退差分: 補償器の伝達関数を入出力微分 方程式に直し,

$$\frac{dy}{dt} \simeq (y(n) - y(n-1))/T_s$$

と近似する. 高次の微分の近似には上記の近 似を再帰的に用いる. 極・零点のマッチング: 連続時間から離散
 時間への対応 z = e^{sTs} (既出) を利用し,離散
 時間補償器 C_d(z) を以下のように求める. だ
 たしαは調整用のパラメータ.

$$C_c(s) = g \frac{\prod_{l=1}^M (s-b_l)}{\prod_{k=1}^N (s-a_k)}$$
$$\Rightarrow C_d(z) = \alpha g \frac{\prod_{l=1}^M (z-e^{b_l T_s})}{\prod_{k=1}^N (z-e^{a_k T_s})}$$

上記のようにすることで,連続時間の補償器の極と零点に対応した離散時間版の極と零点 を持つ補償器が得られる.

• 双一次変換: 双一次変換は

$$s = \alpha \frac{z - 1}{z + 1}$$

によって定義される変換であった $(\alpha > 0)$.

これを利用し

$$\alpha = \frac{2}{T_s}$$

として,離散時間補償器 $C_d(z)$ を以下のように求める.

$$C_d(z) = C_c(s)|_{s=\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}}$$
$$\alpha = \frac{2}{T_s}$$
という式は, $z = e^{sT_s}$ の逆関数

$$s = \frac{1}{T_s} \log z$$

 $f(z) = (z+1)\log z$ をz = 1のまわりで1次近似すると、 $f(z) \simeq f(1) + f'(1)(z-1)$ f(1) = 0 $f'(1) = \left| \log z + \frac{z+1}{z} \right|_{z=1} = 2.$

よって、 $f(z) \simeq 2(z-1)$ しがたって、



$$s = \frac{1}{T_s} \log z$$

であったが、上式に先の $\log z$ の近似を代入すると、

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$$

となる.この式は近似から得られたのではあるが,双一次変換なので,変数変換として利用可能である.

・状態空間表現に基づく離散化: この方法は数学的には簡単であり,補償器の状態空間表現を求め,行列の指数関数を用いてそれを離散化すれば,離散時間補償器が得られる.ただし,微分補償を含む補償器のように状態方程式で書き下せない補償器には適用できない.



z領域における古典制御的な制御系の設計法
 は, s領域(連続時間)と同様.

- これは、以下の3要素に大別される.
 - ▷ 安定化
 - ▷ 時間領域における特性の補償
 - ▷ 周波数領域における特性の補償



● 古典制御では,補償器を少数の可調整パラメー タを除いて固定し、パラメータ値の変更によっ てフィードバックシステムの特性を改善する という手法を取ることが多い. 安定化につい ては、積極的に安定化するというよりは、制 御系が安定となる範囲でパラメータを探索す るのであるが…

- より積極的には、極配置によって安定化をおこなう.
- 制御工学およびシステム工学を受講した者は、
 極配置というと状態フィードバックを連想するかもしれないが、伝達関数の範囲でも極配置は可能である.

極配置については後の講義で取り扱うので、 今回の講義では安定化についてはこれ以上取り上げない。

時間領域における特性の補償

- 時間領域における特性には、目標値(ステップ 状であることが多い)に対する定常偏差、ス テップ応答の波形などがある.
- ステップ応答の波形は, PID 制御(次回)のパ
 ラメータ調整などの手段で整形される.
- 今回の講義では、目標値に対する定常偏差について述べる。

- フィードバック制御の目的のひとつは、制御 対象の出力を目標値に追従させること。
- 典型的な目標値は以下の2種類.



● 先に述べた典型的な目標値を一般化して, 目標値 $r = (r(n))_{n \in \mathbb{N}}$ の z 変換 R(z) を,

$$R(z) = \frac{P(z)}{(z-1)^k}$$

となる信号とする. ただし, P(z) は零でない 多項式で, $P(z) \ge (z-1)$ は互いに疎, $k \ge 1$, $\deg P(z) \le k \ge 5$.

以下のフィードバックシステムを考える.



$$Y(z) = \frac{G(z)C(z)}{1 + G(z)C(z)}R(z)$$

である.

● 天下り式であるが, n ≥ 0 に対し,

$$G(z)C(z) = \frac{N(z)}{(z-1)^n D(z)}$$

となっていて, N(z)および D(z)は (z-1)と 互いに疎であるものとする. このとき, フィー ドバックシステムは n 型であるという.

● $E(z) = R(z) - Y(z), \mathcal{Z}^{-1}[E(z)] = (e(n))_{n \in \mathbb{N}}$ とする.

$$E(z) = \frac{1}{1 + G(z)C(z)}R(z)$$



z 変換の最終値定理は、以下のようなものであった。

xが因果的で, $n \rightarrow \infty$ としたとき 有限の極限 $x(\infty)$ に収束すると仮 定する.このとき,

$$x(\infty) = \lim_{z \to 1} (z - 1) X(z)$$

• $k \leq n$ で, z 変換の最終値定理が適用できれ ば, $P(z) \neq 0, D(1) \neq 0, N(1) \neq 0$ より, $\lim_{n\to\infty} e(n) = 0$ であることが, 次のように して計算できる.

$$\lim_{n \to \infty} e(n) = \lim_{z \to 1} (z - 1) \frac{\frac{P(z)}{(z - 1)^k}}{1 + \frac{N(z)}{(z - 1)^n D(z)}}$$
$$= \lim_{z \to 1} \frac{\frac{P(z)}{(z - 1)^{k - 1}}}{1 + \frac{N(z)}{(z - 1)^n D(z)}}$$
$$= \lim_{z \to 1} \frac{(z - 1)^{n + 1 - k} P(1)}{(z - 1)^n + \frac{N(1)}{D(1)}} = 0.$$

すなわち, $k \leq n \, \overline{c}$, $z \, \overline{z}$ 変換の最終値定理が適用できる場合には, 定常偏差は零となる.

k = *n* + 1 で, *z* 変換の最終値定理が適用可能 であれば, 先ほどと同一の計算により,

$$\lim_{n \to \infty} e(n) = \frac{P(1)D(1)}{N(1)}$$

すなわち、この場合、制御系の出力は目標値 に追従しきれず、有限の定常偏差が残ること になる. k > n + 1 のときには, z 変換の最終値定理を 機械的に適用すると,

$$\lim_{n \to \infty} e(n) = \infty.$$

z 変換の最終値定理が適用できるならこの値 は有限値になる筈だから, この場合には z 変 換の最終値定理の適用条件が満たされていな かったことがわかる.

• 以上をまとめると、次のようになる.

 z 変換の最終値定理が適用可能であるとき, k ≤ n なる R(z) には 誤差零で追従, k = n+1 のときには 有限の誤差が残る (これを定常偏 差と呼ぶ). • k > n+1のときは z 変換の最終値定理は適用できない (因果的でないか, x(n) が $n \to \infty$ としたとき有限の極限値に収束しないかの, いずれか).

- 制御系の伝達関数が不安定極を持たなければ、 その逆z変換は有限の極限値に収束するので、 z変換の最終値定理が適用できる.換言すると、z変換の最終値定理を使う場合には制御 系がすでに安定化されていることが暗黙の前 提となっている.
- z 変換の最終値定理を制御系の安定性の判別 に使うことはできない.

以上では、一般的な目標値について述べてきたが、応用上重要なのはステップ状の目標値(k = 1)への追従.この場合、n = 0のときには有限の定常偏差が残り、n ≥ 1 であれば定常偏差は零となる.

ある信号にz変換の最終値定理が適用可能であるという条件は、その信号が有限値に収束するという条件を含んでいる。制御系がこの条件を満たすことの検証は必ずしも容易でない。



1 $(z-1)^n$

の項を含めることで, z 変換の最終値定理が 適用可能であれば, システムの目標信号への 追従特性を改善することができる. ただし、一般に、nが大きいほど、制御系がz
 変換の最終値定理の適用条件を満たすように
 することは困難になる.

周波数特性の設計

- 周波数特性を設計する際には, z 領域で設計 するのではなく, 一旦連続時間に変換するこ とが一般的.
- すでに述べた連続時間補償器の離散化の1種 なのであるが、念のために改めて述べておく、

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$$

$$z = \frac{\frac{2}{T_s} + s}{\frac{2}{T_s} - s}$$

が得られる.

 ・双一次変換を用いた連続時間設計を経由する
 周波数特性の設計は以下の通り.

▷ 制御対象の離散時間伝達関数 G_d(z) を

 $\left[G_d(z)\right]_{z=\frac{\frac{2}{T_s}+s}{\frac{2}{T_s}-s}}$

により連続時間に変換し,連続時間において望ましい周波数特性を実現する連続時間補償器 $C_c(s)$ を設計する.

▷ 連続時間補償器 C_c(s) を

$$\left[C_c(s)\right]_{s=\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}}$$