ディジタル制御 第 **6** 回

伝達関数に基づく
ディジタル制御系の設計 (1)

- 伝達関数に基づくディジタル制御系の設計は, 古典制御に由来するものである.
- この設計法はシステムの周波数応答を用いるので, 今回の講義では, まず, 離散時間システムの周波数応答について説明する.
- 続いて, フィードバックシステムにとって重要な概念である, well-posedness と内部安定性について述べる.

- 後で述べるように, 古典制御的な制御設計では連続時間の方が離散時間よりもノウハウが蓄積されている関係で, まず連続時間で補償器を設計し, 続いてそれを離散化する, という方法が取られることが多い. 連続時間における古典制御的な制御系設計は制御工学の守備範囲なので, 今回の講義ではこれについては当面述べず, 離散化の方法に絞って解説する.

- 今回の講義の最後の話題として, z 領域における制御系設計について簡単に触れる.

システムの周波数応答

離散時間では…

- 1 入力 1 出力の 線形時不変で BIBO 安定な 離散時間システム に対し, そのインパルス応答の離散時間フーリエ変換, あるいはその伝達関数の変数 z に $e^{j\omega}$ を代入したものを, システムの**周波数応答**あるいは**周波数特性**と呼ぶ.

連続時間では…

- 1 入力 1 出力の線形時不変で BIBO 安定な連続時間システムに対し, そのインパルス応答のフーリエ変換, あるいはその伝達関数の変数 s に $j\omega$ を代入したものを, システムの周波数応答あるいは周波数特性と呼ぶ.

- 以下では, システムは因果的かつ BIBO 安定で, その伝達関数を $G(z)$, インパルス応答を $g = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とする．片側 z 変換の定義により, $G(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g(n)z^{-n}$ である.
- システムに印加される入力 u を次のように取る.

$$u(n) = e^{j\omega n}.$$

- システムの出力を y とすると…

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \sum_{m \in \mathbb{N}} g(m) e^{j\omega(n-m)} \\
&= \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} g(m) e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} \\
&= \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} g(m) e^{-j\omega m} \right) u(n)
\end{aligned}
$$

- 以上で見たように, 入力に次の複素数が乗じられている.

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} g(m) e^{-j\omega m}$$

- これは, システムのインパルス応答を離散時間フーリエ変換したものの角周波数 ω における値であり, かつ $G(z)$ において $z = e^{j\omega}$ としたものである.

- システムの周波数応答は, システムがBIBO安定であれば定義できるが, BIBO安定でない場合には定義できるとは限らない.
- 独立変数が周波数の場合も, 角周波数の場合も, 「周波数応答」という言葉が用いられる.
- 周波数応答と周波数特性という言葉は同義.

- $G(e^{j\omega})$ の絶対値を $A(e^{j\omega})$ と書き，システムの振幅周波数特性あるいは振幅特性という．
- $G(e^{j\omega})$ の偏角を $\theta(e^{j\omega})$ と書き，システムの位相周波数特性あるいは位相特性という．

ナイキスト周波数

- 以下では, サンプリング周期が一定の離散時間線形時不変システムを検討の対象とし, サンプリング周期が周波数応答の決定にどのように影響するかを調べる.

- システムのサンプリング周期を T_s, サンプリング周波数を f_s, サンプリング角周波数を ω_s とする.

$$f_s = 1/T_s$$
$$\omega_s = 2\pi f_s$$

である.

- サンプリングの影響を明示するために, 時刻を n から nT_s に変更する:

$$u(nT_s) = e^{j\omega nT_s}.$$

- $e^{j\omega nT_s}$ で正弦関数と余弦関数を表現したいので, 正の角周波数と負の角周波数が必要.

- 信号の角周波数を ω とすると,

$$\omega - 2\pi k/T_s \in (-\pi/T_s, \pi/T_s]$$

となる $k \in \mathbb{Z}$ が一意的に定まる．この k に対し,

$$\omega_* = \omega - 2\pi k/T_s$$

とおく．

- $e^{j\theta}$ は周期 2π の周期関数だから,

$$e^{j\omega_* nT_s} = e^{j(\omega - 2\pi k/T_s)nT_s} = e^{j\omega nT_s}$$

となる. よって, $\omega_* \in (-\pi/T_s, \pi/T_s]$ に対し,

$$\{\omega_* + 2\pi k/T_s\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

という角周波数の信号は, すべて角周波数 ω_* の信号として処理される.

- 上記の結果として, ディジタル制御されたシステムでは, サンプル点のあいだで高周波の振動が発生しているにもかかわらず制御システムがこれを検知および抑制することができない, ということがあり得る.

- このような現象の有無は, 状態空間表現されたシステムではサンプル点間の応答波形を行列の指数関数によって復元することで確認できる他, 拡張 z 変換という方法でも調べることができる. さらに, シミュレータ上でサンプリング周期を変更することでも確認できる.

- 信号 u が周波数 $[-f_B, f_B]$ の範囲外では零になっているものする (このような信号を**帯域制限された信号**と呼ぶ). このとき, この信号がサンプリング周期一定の離散時間システムによって正しく処理されるためには, $2\pi f_B \leq \pi/T_s$, すなわち $f_s = 1/T_s$ に対し,

$$2f_B \leq f_s$$

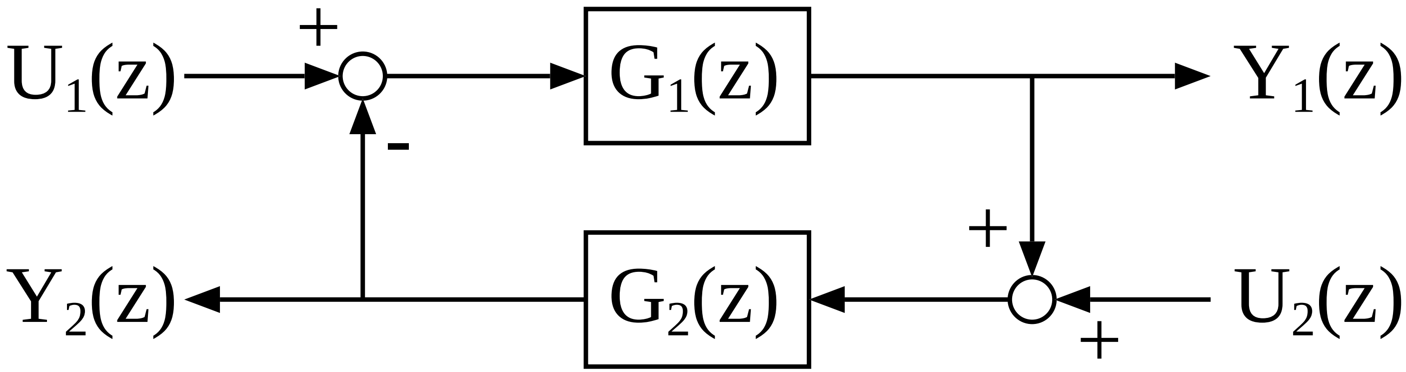
でなければならない.

- 以上により, 周波数 $[-f_B, f_B]$ に帯域制限された信号 u を離散時間システムで正しく処理するためには, サンプリング周波数を $2f_B \leq f_s$ を満たすように (十分高く) 取らなければならない. $2f_B$ を**信号 u の Nyquist 周波数**と呼ぶ.

Well-posedness と内部安定性

- フィードバックシステムが工学的に意味を持つためには，そのシステムが一意的な解 (応答) を持たなければならない．まず，一般的なフィードバックシステムに対して，この条件 (**well-posed** と呼ぶ) を求める (典拠は前田: 線形システム, 朝倉書店, 2001).

- 以下の図のように伝達関数が結合された離散時間のフィードバックシステムを考える．



- $Y_1(z) = G_1(z)(U_1(z) - Y_2(z))$, $Y_2(z) = G_2(z)(U_2(z) + Y_1(z))$ だから，これらを纏めると，

$$\begin{pmatrix} 1 & G_1(z) \\ -G_2(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(z)U_1(z) \\ G_2(z)U_2(z) \end{pmatrix}$$

- このフィードバックシステムが意味を持つための必要十分条件は, 左辺の行列が可逆であること.
- そのためには, $1 + G_1(z)G_2(z)$ が零でない有理式となることが必要かつ十分.

- このように, 解の存在と一意性が保証されたフィードバックシステムを **well-posed** であると言う.
- フィードバックシステムを設計する際には, まず第一に, それが well-posed であるようにしなければならない.

- 以下の議論で, 多くの場合, フィードバックシステムが well-posed であることは, 暗黙のうちに仮定される.

- 設計者が不用意にフィードバックシステムを作成した場合, それが well-posed とならないこともあり得るので, 注意を要する.

- 制御システムでは, 多くの場合, $G_1(z)$ および $G_2(z)$ をプロパーな伝達関数である. このような状況下で, フィードバックシステムが well-posed であることを, $1+G_1(z)G_2(z)$ が零でない有理式で, それに加えて $(U_1(z), U_2(z))$ から $(Y_1(z), Y_2(z))$ への伝達関数行列のすべての要素がプロパーであることと定義する場合もある.

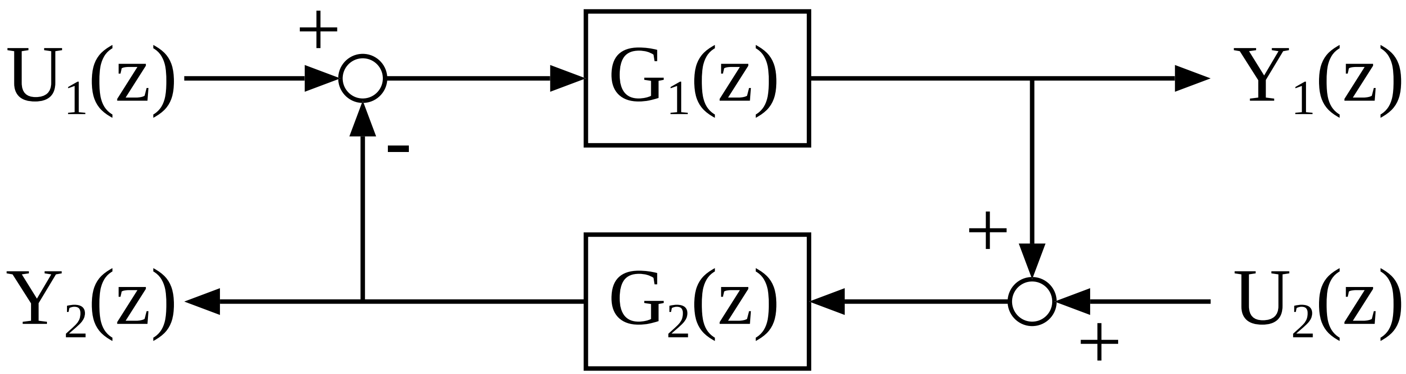
- 上記に加えて, その伝達関数行列のすべての要素が安定であるとき, フィードバックシステムは内部安定であると呼ぶ.

- この内部安定性の定義はロバスト制御の分野で標準的．たとえば藤井：ロバスト制御，コロナ社, 2001, 中野, 松尾, ディジタル制御, 昭晃堂, 2001, W. S. Levine (ed): The Control Handbook, CRC Press, 2011 など．状態空間表現されたシステムを前提とし, 漸近安定と内部安定を同義語として用いる流儀もあるが, 必ずしも一般的ではない．

- これを一般化して, (線形時不変) フィードバックシステムが **well-posed** であるとは そのシステムが一意解を持つことを言い, 内部安定であるとはそのシステムの構成要素となる伝達関数がすべて安定であることをいう.

- 多くの教科書で, well-posedness や 内部安定性は, 特定の構造のフィードバックシステムに対して定義されているので注意. 先と同様に, well-posed の定義に システムを構成要素となる伝達関数がすべてプロパーであることを含む場合もある.

- 以下のフィードバックシステムは well-posed で, $G_1(z)$ および $G_2(z)$ は プロパーであるという前提のもとで, そのすべての構成要素がプロパーかつ内部安定となる条件を調べる.



- 上記の条件の下で,

$$(U_1(z), U_2(z))$$

から

$$(Y_1(z), Y_2(z))$$

への伝達関数行列は, 以下のようになる.

$$
\begin{pmatrix}
\dfrac{G_1(z)}{1+G_1(z)G_2(z)} & -\dfrac{G_1(z)G_2(z)}{1+G_1(z)G_2(z)} \\
\dfrac{G_1(z)G_2(z)}{1+G_1(z)G_2(z)} & \dfrac{G_2(z)}{1+G_1(z)G_2(z)}
\end{pmatrix}
$$

この伝達関数行列のすべての要素がプロパーかつ安定となるための条件を知りたい.

- **定理**　先の図のフィードバックシステムが well-posed であるとき, それに対応する伝達関数行列の各要素がプロパーであるための 必要十分条件は,

$$\lim_{z\to\infty}(1+G_1(z)G_2(z)) \neq 0$$

となることである.

- 証明:

$$\gamma_i = \lim_{z \to \infty} G_i(z) \quad (i = 1, 2)$$

とする.

(⇒) の証明 上記の伝達関数行列の各要素がプロパーであると仮定する．すると，それらの $z \to \infty$ としたときの値は有限．よって，特に，$\gamma_1\gamma_2/(1+\gamma_1\gamma_2) < \infty$．したがって，

$$1 - \frac{\gamma_1\gamma_2}{(1+\gamma_1\gamma_2)} = \frac{1}{1+\gamma_1\gamma_2}$$

は有限．ゆえに，$1+\gamma_1\gamma_2 \neq 0$ である．

($\Leftarrow$) の証明 $1+\gamma_1\gamma_2 \neq 0$ と仮定する．フィードバックシステムは well-posed であると仮定されていたから, $1{+}G_1(z)G_2(z)$ は零でない有理式で, プロパーである．仮に $1{+}G_1(z)G_2(z)$ が 厳密にプロパーであれば, $1+\gamma_1\gamma_2 = 0$ となり, 仮定に矛盾． よって, $1+G_1(z)G_2(z)$ の分母多項式と分子多項式の次数は同一であり, $1/(1+G_1(z)G_2(z))$ もプロパー．したがって, 上記の伝達関数行列の各要素はプロパー.

- 続いて, 内部安定性について考える.
- 次ページの 3 個の伝達関数が すべて安定となるための条件を求めたい.

$$G_A(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}$$

$$G_B(z) = \frac{G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}$$

$$G_C(z) = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}$$

- $G_i(z) = N_i(z)/D_i(z)$ で, $N_i(z)$ と $D_i(z)$ は既約な多項式とすると $(i = 1, 2)$: 先の式にこれらを代入すると, 次ページの式を得る.

$$G_A(z) = \frac{N_1(z)D_2(z)}{D_1(z)D_2(z) + N_1(z)N_2(z)}$$

$$G_B(z) = \frac{N_2(z)D_1(z)}{D_1(z)D_2(z) + N_1(z)N_2(z)}$$

$$G_C(z) = \frac{N_1(z)N_2(z)}{D_1(z)D_2(z) + N_1(z)N_2(z)}$$

- これらの内部安定性について考える.

- フィードバックシステム が 安定であるためには, 多項式 $D_1(z)D_2(z) + N_1(z)N_2(z)$ が安定 (すなわち すべての零点が複素単位円の内部にある) であることが十分条件であるが…
- 実は, これは必要条件にもなっている.

必要性の証明:

- $G_A(z)$, $G_B(z)$, $G_C(z)$ が安定であり，一方で多項式 $D_1(z)D_2(z)+N_1(z)N_2(z)$ が安定でないと仮定して，矛盾を導く.
- γ を $D_1(z)D_2(z)+N_1(z)N_2(z)$ の不安定零点とする.

- $D_1(\gamma)D_2(\gamma) + N_1(\gamma)N_2(\gamma) = 0$ であるが, $G_A(z)$, $G_B(z)$, $G_C(z)$ はすべて安定だから, γ はこれらの極とならない. これは, $G_A(z)$, $G_B(z)$ および $G_C(z)$ の分子多項式の零点が, 分母多項式 $D_1(z)D_2(z)+N_1(z)N_2(z)$ の不安定零点をキャンセルしていることを意味する.

▷ よって,

$$N_1(\gamma)D_2(\gamma) = 0,$$
$$N_2(\gamma)D_1(\gamma) = 0,$$
$$N_1(\gamma)N_2(\gamma) = 0.$$

▷ $D_1(\gamma)D_2(\gamma) + N_1(\gamma)N_2(\gamma) = 0$ でもあったから,

$$D_1(\gamma)D_2(\gamma) = 0$$

である.

- ▷ $N_1(\gamma) = 0$ と仮定すると, $N_1(z)$ と $D_1(z)$ は互いに素だったから, $D_1(\gamma) \neq 0$. また, $N_2(\gamma)D_1(\gamma) = 0$ より, $N_2(\gamma) = 0$. $N_2(z)$ と $D_2(z)$ は互いに素だったから, $D_2(\gamma) \neq 0$. したがって,

$$D_1(\gamma)D_2(\gamma) \neq 0$$

となり矛盾.

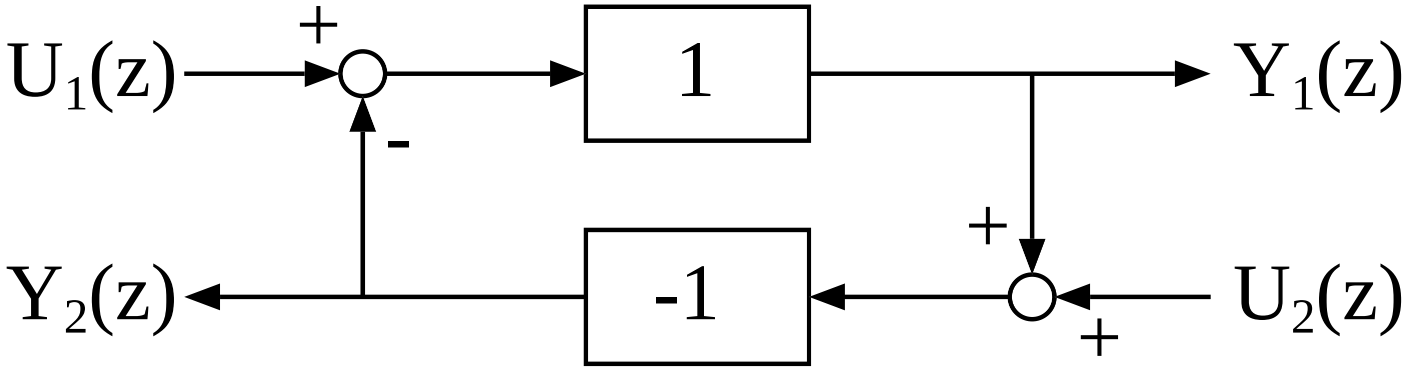
- $D_2(\gamma) = 0$ と仮定すると, $N_2(z)$ と $D_2(z)$ は互いに素だったから, $N_2(\gamma) \neq 0$. また, $N_2(\gamma)D_1(\gamma) = 0$ より, $D_1(\gamma) = 0$. $N_1(z)$ と $D_1(z)$ は互いに素だったから, $N_1(\gamma) \neq 0$. したがって,

$$N_1(\gamma)N_2(\gamma) \neq 0$$

となり矛盾.

Well-posed でないシステムの例

- フィードバックシステムが well-posed でない例として, $G_1(z) = 1$, $G_2(z) = -1$ (いずれも定数) の場合を考える. このとき, $1 + G_1(z)G_2(z) = 0$ である.


U1(z)
+
-
1
Y1(z)
+
Y2(z)
-1
U2(z)
+

- 先の例では, $U_1(z)$ と $U_2(z)$ は独立な入力として設定されているのだが, 入出力関係を計算してみると,

$$Y_1(z) = U_1(z) - Y_2(z)$$
$$Y_2(z) = -Y_1(z) - U_2(z)$$

となる.

- よって,

$$U_1(z) = U_2(z) = Y_1(z) + Y_2(z)$$

となり, $U_1(z) = U_2(z)$ という (想定外の) 束縛条件が発生し, $Y_1(z)$ と $Y_2(z)$ は不定 ($U_1(z) = U_2(z) = Y_1(z) + Y_2(z)$ を満たせば何でもよい) という結果になってしまう.

- 不用意にフィードバックシステムを構成するとこのような不都合が発生するため，フィードバックシステムの well-posedness の確認は重要.

Well-posed の確認

- $G_1(z)$ と $G_2(z)$ の少なくとも一方が厳密にプロパーである場合には, $G_1(z)G_2(z)$ は厳密にプロパーで, したがって $1 + G_1(z)G_2(z)$ が零になることはないから, フィードバックシステムが well-posed であることは自明.

- 一方で, これらがいずれも厳密にプロパーでないときには, どこかの段階でフィードバックシステムが well-posed であることを確認する必要がある.

ディジタル制御系の設計法の分類

- ディジタル制御系の伝統的な設計法は, 連続時間制御対象に対して設計された 連続時間補償器を 離散化する方法(アナログ補償器のディジタル実装) と, 離散化した制御対象に対して 離散時間補償器を設計する方法に大別される.

- 1990 年代以降に確立された, 入力と出力に関する サンプル点間を含む波形全体の対応を調べる連続リフティングと呼ばれる手法もあるが, 入門向きではない.

- これとは別の観点であるが, 伝達関数表現と周波数応答に基づく古典制御的な設計法, 状態空間表現に基づく現代制御的な設計法, 伝達関数表現と状態空間表現を併用する H_∞ 制御などのいわゆるアバンスト制御的な設計法に分類することもできる.

- ディジタル制御の利点のひとつは 複雑な制御器を容易に利用可能なことであり, 単純な構造の古典制御による制御器に拘泥する理由はあまりない. このためか, 教科書では古典制御的な設計法は取り扱われていないが, この講義では簡単に触れる.

アナログ補償器のディジタル実装

- 古典制御は 伝統的には, 連続時間システムを対象としていた. ディジタル制御でも直接古典制御的な制御系設計は可能であるが, アナログ制御にノウハウなどがより多く蓄積されている関係で, まずアナログ補償器を設計し, 続いてそれを離散化した ディジタル補償器を実装する, という方法がしばしば取られる.

- 離散化の方法は様々であるが, 一般には離散化誤差を伴うため, 多くの場合, 離散化後の補償器に関する性能評価 (とくに安定性解析) や再設計が必要.
- なお, 補償器, 制御器 , コントローラは同義.

- 設計された補償器が $C_c(s)$ という伝達関数の形で与えられているとき, これを離散化する典型的な方法は:

  1. 前進差分
  2. 後退差分
  3. 極・零点のマッチング
  4. 双一次変換
  5. 状態空間表現に基づく離散化

- 先に述べた方法について順に説明する.

- **前進差分:** 補償器の伝達関数を入出力微分方程式に直し,

$$\frac{dy}{dt} \simeq (y(n+1) - y(n))/T_s$$

と近似する. 高次の微分の近似には上記の近似を再帰的に用いる.

- **後退差分:**　補償器の伝達関数を入出力微分方程式に直し,

$$\frac{dy}{dt} \simeq (y(n) - y(n-1))/T_s$$

と近似する. 高次の微分の近似には上記の近似を再帰的に用いる.

- 極・零点のマッチング連続時間から離散時間への対応 $z = e^{sT_s}$ (既出) を利用し, 離散時間補償器 $C_d(z)$ を以下のように求める．ただし α は調整用のパラメータ.

$$C_c(s) = g\frac{\prod_{l=1}^{M}(s-b_l)}{\prod_{k=1}^{N}(s-a_k)}$$

$$\Rightarrow C_d(z) = \alpha g\frac{\prod_{l=1}^{M}(z-e^{b_l T_s})}{\prod_{k=1}^{N}(z-e^{a_k T_s})}$$

上記のようにすることで, 連続時間の補償器の極と零点に対応した離散時間版の極と零点を持つ補償器が得られる.

- 双一次変換双一次変換は

$$s = \alpha \frac{z-1}{z+1}$$

によって定義される変換であった $(\alpha > 0)$.

これを利用し

$$\alpha = \frac{2}{T_s}$$

として, 離散時間補償器 $C_d(z)$ を以下のように求める.

$$C_d(z) = C_c(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}}$$

$\alpha = \dfrac{2}{T_s}$ という式は, $z = e^{sT_s}$ の逆関数

$$s = \frac{1}{T_s} \log z$$

の近似から誘導される.

$$f(z) = (z+1)\log z$$

を $z = 1$ のまわりで 1 次近似すると,

$$f(z) \simeq f(1) + f'(1)(z-1)$$

$$f(1) = 0$$

$$f'(1) = \left[\log z + \frac{z+1}{z}\right]_{z=1} = 2.$$

よって,

$$f(z) \simeq 2(z-1)$$

しがたって,

$$\log z = \frac{f(z)}{z+1} \simeq 2\frac{z-1}{z+1}.$$

$$s = \frac{1}{T_s} \log z$$

であったが, 上式に先の $\log z$ の近似を代入すると,

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$$

となる. この式は近似から得られたのではあるが, 双一次変換なので, 変数変換として利用可能である.

- **状態空間表現に基づく離散化:** この方法は数学的には簡単であり, 補償器の状態空間表現を求め, 行列の指数関数を用いてそれを離散化すれば, 離散時間補償器が得られる. ただし, 微分補償を含む補償器のように 状態方程式で書き下せない補償器には適用できない.

z 領域における設計

- z 領域における古典制御的な制御系の設計法は, s 領域 (連続時間) と同様.

- これは, 以下の 3 要素に大別される.
  - ▷ 安定化
  - ▷ 時間領域における特性の補償
  - ▷ 周波数領域における特性の補償に大別される.

安定化

- 古典制御では, 補償器を少数の可調整パラメータを除いて固定し, パラメータ値の変更によってフィードバックシステムの特性を改善するという手法を取ることが多い. 安定化については, 積極的に安定化するというよりは, 制御系が安定となる範囲でパラメータを探索のであるが…

- より積極的には, 極配置によって安定化をおこなう.

- 制御工学およびシステム工学を受講した者は, 極配置というと状態フィードバックを連想するかもしれないが, 伝達関数の範囲でも極配置は可能である.

- 極配置については後の講義で取り扱うので, 今回の講義では安定化についてはこれ以上取り上げない.

時間領域における特性の補償

- 時間領域における特性には, 目標値 (ステップ状であることが多い) に対する定常偏差, ステップ応答の波形などがある.
- ステップ応答の波形は, PID 制御 (次回) のパラメータ調整などの手段で整形される.
- 今回の講義では, 目標値に対する定常偏差について述べる.

- フィードバック制御の目的のひとつは, 制御対象の出力を目標値に追従させること.
- 典型的な目標値は以下の 2 種類.

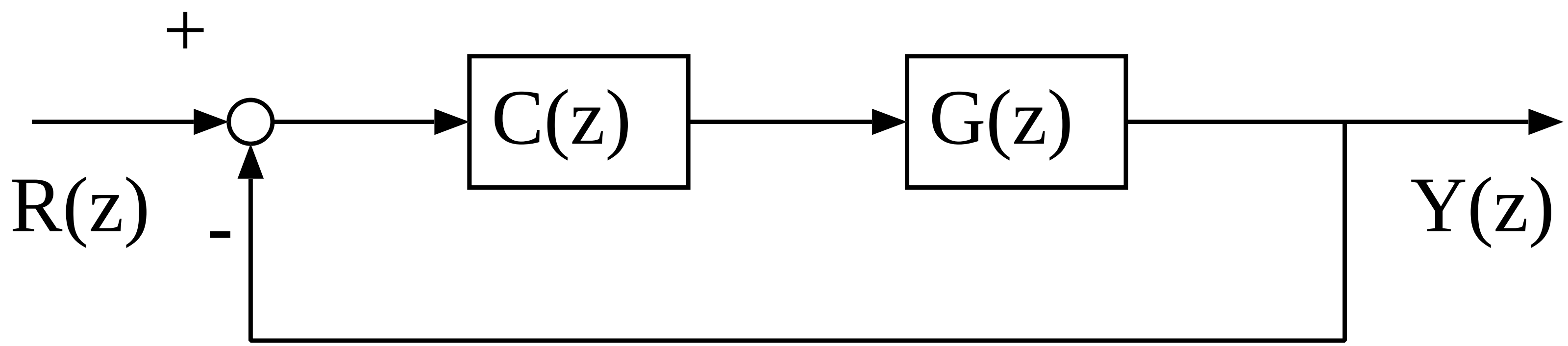
信号名	z 変換
ステップ	$A\dfrac{z}{z-1}$
ランプ	$AT_s\dfrac{z}{(z-1)^2}$

- 先に述べた典型的な目標値を一般化して, 目標値 $r = (r(n))_{n\in\mathbb{N}}$ の z 変換 $R(z)$ を,

$$R(z) = \frac{P(z)}{(z-1)^k}$$

となる信号とする. ただし, $P(z)$ は零でない多項式で, $P(z)$ と $(z-1)$ は互いに疎, $k \geq 1$, $\deg P(z) \leq k$ とする.

- 以下のフィードバックシステムを考える.



$$Y(z) = \frac{G(z)C(z)}{1 + G(z)C(z)} R(z)$$

である.

- 天下り式であるが, $n \geq 0$ に対し,

$$G(z)C(z) = \frac{N(z)}{(z-1)^n D(z)}$$

となっていて, $N(z)$ および $D(z)$ は $(z-1)$ と互いに疎であるものとする. このとき, フィードバックシステムは n 型であるという.

- $E(z) = R(z) - Y(z)$, $\mathcal{Z}^{-1}[E(z)] = (e(n))_{n \in \mathbb{N}}$ とする.

$$E(z) = \frac{1}{1 + G(z)C(z)} R(z)$$

である.

- z 変換の最終値定理は, 以下のようなものであった.

x が因果的で, $n \to \infty$ としたとき有限の極限 $x(\infty)$ に収束すると仮定する．このとき,

$$x(\infty) = \lim_{z \to 1}(z - 1)X(z)$$

- $k \leq n$ で, z 変換の最終値定理が適用できれば, $P(z) \neq 0$, $D(1) \neq 0$, $N(1) \neq 0$ より, $\lim_{n\to\infty} e(n) = 0$ であることが, 次のようにして計算できる.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} e(n) &= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\frac{P(z)}{(z-1)^k}}{1+\frac{N(z)}{(z-1)^n D(z)}} \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{\frac{P(z)}{(z-1)^{k-1}}}{1+\frac{N(z)}{(z-1)^n D(z)}} \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)^{n+1-k}P(1)}{(z-1)^n+\frac{N(1)}{D(1)}} = 0.
\end{aligned}
$$

すなわち, $k \leq n$ で, z 変換の最終値定理が適用できる場合には, 定常偏差は零となる.

- $k = n + 1$ で, z 変換の最終値定理が適用可能であれば, 先ほどと同一の計算により,

$$\lim_{n\to\infty} e(n) = \frac{P(1)D(1)}{N(1)}$$

すなわち, この場合, 制御系の出力は目標値に追従しきれず, 有限の定常偏差が残ることになる.

- $k > n+1$ のときには, z 変換の最終値定理を機械的に適用すると,

$$\lim_{n \to \infty} e(n) = \infty.$$

z 変換の最終値定理が適用できるならこの値は有限値になる筈だから, この場合には z 変換の最終値定理の適用条件が満たされていなかったことがわかる.

- 以上をまとめると, 次のようになる.

- z 変換の最終値定理が適用可能であるとき, $k \leq n$ なる $R(z)$ には 誤差零で追従, $k = n+1$ のときには 有限の誤差が残る (これを定常偏差と呼ぶ).

- $k > n + 1$ のときは z 変換の最終値定理は適用できない (因果的でないか, $x(n)$ が $n \to \infty$ としたとき有限の極限値に収束しないかの, いずれか).

- 制御系の伝達関数が不安定極を持たなければ，その逆 z 変換は有限の極限値に収束するので，z 変換の最終値定理が適用できる．換言すると，z 変換の最終値定理を使う場合には制御系がすでに安定化されていることが暗黙の前提となっている．

- z 変換の最終値定理を制御系の安定性の判別に使うことはできない．

- 以上では, 一般的な目標値について述べてきたが, 応用上重要なのはステップ状の目標値 $(k = 1)$ への追従. この場合, $n = 0$ のときには有限の定常偏差が残り, $n \geq 1$ であれば 定常偏差は零となる.

- ある信号に z 変換の最終値定理が適用可能であるという条件は, その信号が有限値に収束するという条件を含んでいる. 制御系がこの条件を満たすことの検証は必ずしも容易でない.

- 補償器 $C(z)$ に

$$\frac{1}{(z-1)^n}$$

の項を含めることで, z 変換の最終値定理が適用可能であれば, システムの目標信号への追従特性を改善することができる.

- ただし, 一般に, n が大きいほど, 制御系が z 変換の最終値定理の適用条件を満たすようにすることは困難になる.

周波数特性の設計

- 周波数特性を設計する際には, z 領域で設計するのではなく, 一旦連続時間に変換することが一般的.
- すでに述べた連続時間補償器の離散化の1種なのであるが, 念のために改めて述べておく.

- 双一次変換の式

$$s = \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}$$

を z について解くことで, その逆変換

$$z = \frac{\frac{2}{T_s} + s}{\frac{2}{T_s} - s}$$

が得られる.

- 双一次変換を用いた連続時間設計を経由する周波数特性の設計は以下の通り.

- ▷ 制御対象の離散時間伝達関数 $G_d(z)$ を

$$\left[G_d(z)\right]_{z=\frac{\frac{2}{T_s}+s}{\frac{2}{T_s}-s}}$$

により連続時間に変換し, 連続時間において望ましい周波数特性を実現する連続時間補償器 $C_c(s)$ を設計する.

▷ 連続時間補償器 $C_c(s)$ を

$$\left[C_c(s)\right]_{s=\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}}$$

によって離散化する.