ディジタル制御系の安定性 (2)
Lyapunov の方法

固有値と固有ベクトル

- $\boldsymbol{A}$ を N 次の実ないし複素正方行列とする.
- $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ で, あるスカラー λ に対して, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ となるとき, λ を $\boldsymbol{A}$ の固有値, $\boldsymbol{v}$ を固有値 λ に対応する固有ベクトルという.

- z を変数としたとき, $\Phi_A(z) = \det(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ を $\boldsymbol{A}$ の特性多項式という ($\det$ は行列式). $\boldsymbol{I}$ は行列 $\boldsymbol{A}$ と同一の大きさの 単位行列とする.

以下の議論では, 特に必要がある場合を除き, 単位行列に対して, その大きさによらず同一の記号 $\boldsymbol{I}$ を用い, $\boldsymbol{I}$ の大きさは 関連する行列に合わせて定められているものとする.

- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ かつ $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ なら,

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{v} = \mathbf{0},$$

よって $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ は非正則で

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0.$$

- λ を $\boldsymbol{A}$ のひとつの固有値とし,

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^N : \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}\}$$

  とする. V_λ は $\mathbb{C}^N$ の部分空間である.

- V_λ の次元を λ に対応する固有空間の次元という.

- 相異なる固有値に対応する固有ベクトルは一次独立である (証明略).

- $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトル全体が $\mathbb{C}^N$ の基底になっているときには, 固有ベクトルを集めて作った行列により $\boldsymbol{A}$ を対角化することができる.
- そうでない場合には, Jordan 標準形という概念が必要になる.
- まず対角化可能な場合について見てゆく.

対角化

- $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^N$ が N 個の一次独立な固有ベクトル $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N\}$ を持つものとする. $\boldsymbol{v}_i$ に対応する固有値を λ_i とする $(1 \leq i \leq N)$. 固有値の中には同一のものがあっても構わない.
- $\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N)$ (固有ベクトルを横に並べて作った行列) とする. $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N\}$ が一次独立であるから, $\boldsymbol{V}$ は逆行列を持つ.

- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ だから,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

- よって

$$\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

  である.

- 上記の手順で行列を対角行列に変換することを行列の**対角化**という.

- 対称行列は直交行列によって, Hermite 行列はユニタリ行列によって対角化できることが証明できる (証明略).

Jordan 標準形

- 行列 $\boldsymbol{A}$ が対角化不能のときにも，適切な正則行列 $\boldsymbol{T}$ を使った相似変換により，行列を Jordan 標準形 (以下 $\boldsymbol{J}$ で表す) という形に変換することができる．
- $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{J}$ であるが，$\boldsymbol{J}$ の形は次ページで述べる．

- $\boldsymbol{J}$ は, K 個のブロックが対角線上にならんだ, 次のような形のブロック対角行列である：

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_K \end{pmatrix}$$

- 各 $\boldsymbol{J}_i$ は m_i 次の正方行列で, $\sum_{i=1}^{K} m_i = N$ である. $\boldsymbol{J}_i$ は以下のような形:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J}_i &= \lambda_i \boldsymbol{I}_{m_i} + \boldsymbol{N}_{m_i} \\
\boldsymbol{N}_{m_i} &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_{m_i-1} \\ \hline 0 & \mathbf{0} \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{J}_i$ は上三角行列で，対角要素に λ_i が並び，$m_i > 1$ のときには対角要素の右上の斜線上に 1 が並び，それ以外の要素は零，という形になっている．

- λ_i は固有値で, $m_i \geq 1$ である ($m_i = 1$ のときには $\boldsymbol{N}_{m_i}$ の部分は存在しない). すべてのブロックについて $m_i = 1$ となるのが, 対角化可能な場合である.

- 正方行列は必ずしも対角化可能であるとは限らないが, Jordan 標準形には変換可能である.
- 上記の事実の証明は線形代数の範疇なので, この講義では述べない. 証明は何通りか知られているが, どれもかなり手間がかかる.

Jordan 標準形と状態方程式の漸近安定性

- 入力 $\boldsymbol{u}$ が恒等的に零であるときの状態方程式

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) \qquad (\bigstar)$$

を考える.

- (★) が漸近安定であるとは, 任意の初期値に対して $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}(n) = \mathbf{0}$ となることをいう.

- 初期値を $\boldsymbol{x}(0)$ とし，$\boldsymbol{X}(z) = \mathcal{Z}[\boldsymbol{x}]$ として，(★) を z 変換して整理すると，

$$\boldsymbol{X}(z) = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)$$

となる．

- $\boldsymbol{J}$ を $\boldsymbol{A}$ の Jordan 標準形, $\boldsymbol{T}$ を対応する相似変換の行列とすると,

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$$

より

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}^{-1}.$$

- 一方,

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{I}\boldsymbol{T}^{-1}$$

だから,

$$\begin{aligned} z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} &= z\boldsymbol{T}\boldsymbol{I}\boldsymbol{T}^{-1} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}^{-1} \\ &= \boldsymbol{T}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J})\boldsymbol{T}^{-1} \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{X}(z) = \boldsymbol{T}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J})^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(0). \qquad (☆)$$

- $\boldsymbol{J}$ は正方行列 $\boldsymbol{J}_i$ が対角要素に並んだブロック対角行列だから, $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J})^{-1}$ は $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}_i)^{-1}$ が対角要素に並んだブロック対角行列である.
- したがって, $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}_i)^{-1}$ を求めてから逆 z 変換をおこなうことで, $(\bigstar)$ の解を求めることができる.

- $\boldsymbol{J}_i$ が固有値 λ_i に対応した n_i 次の行列であるとき, $z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}_i$ と $(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}_i)^{-1}$ は次の形になる (直接計算すれば確認できる). (空白は零をあらわすものとする).

$$z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}_i = \begin{pmatrix} z-\lambda_i & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & z-\lambda_i & -1 \\ & & & z-\lambda_i \end{pmatrix}$$

- よって, $(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}_i)^{-1}$ は以下の形になる.

$$(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}_i)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z-\lambda_i} & \frac{1}{(z-\lambda_i)^2} & \cdots & \frac{1}{(z-\lambda_i)^{i-1}} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \frac{1}{z-\lambda_i} & \frac{1}{(z-\lambda_i)^2} \\ & & & \frac{1}{z-\lambda_i} \end{pmatrix}$$

- 前ページの式の右辺において, 対角要素はすべて $\frac{1}{z-\lambda_i}$, 対角線の 1 個右上斜線上は $\frac{1}{(z-\lambda_i)^2}$ であり, 以下同様に対角線から 1 段右上に上がるごとに $(z-\lambda_i)$ の冪が 1 増える.

- 上記の変形と, 前回の逆 z 変換の計算結果から, $(\bigstar)$ が漸近安定であるためには, 行列 $\boldsymbol{A}$ のすべての固有値の絶対値が $\mathbf{1}$ 未満であることが必要かつ十分ということがわかる.

- また, (★) が漸近安定であれば, $\boldsymbol{A}^N$ の行列ノルムを, ある定数 K とある c (ただし $0 \leq c < 1$) を用いて, $\|\boldsymbol{A}^n\| \leq Kc^n$ という形で上から押さえることができる.

- 離散時間システムが対象であることが明らかな場合, 絶対値が 1 未満の固有値を安定な固有値, すべての固有値が安定な行列を安定な行列, 絶対値が 1 以上の固有値を不安定な固有値, 不安定な固有値を 1 個以上持つ行列を不安定な行列と呼ぶことがある. また, すべての固有値が不安定な行列を反安定な行列と呼ぶことがある.

- 以上は離散時間システムを対象とした議論なのであるが…
- 連続時間システムでは,「安定な行列」という言葉は, 違う意味で用いられる.

- 連続時間システム

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

が漸近安定 (時間の経過とともに解が零に近付く) ための必要十分条件は, $\boldsymbol{A}$ のすべての固有値の実部が負であることである.

- 上記の事実については詳しくは述べないが, こちらも上述の Jordan 標準形から導かれる結果であり, 離散時間では $\boldsymbol{A}^N$ だった部分が連続時間では $\exp[\boldsymbol{A}t]$ となることが相異点である.

- 上記を踏まえ, 連続時間システムが対象であることが明らかな場合, 左半平面 (虚軸を含まない) にある固有値を安定な固有値, すべての固有値が安定な行列を安定な行列, 右半平面 (虚軸を含む) にある固有値を不安定な固有値, 不安定な固有値を 1 個以上持つ行列を不安定な行列と呼ぶことがある. また, すべての固有値が不安定な行列を反安定な行列と呼ぶことがある.

Jordan 標準形と伝達関数行列

- 状態空間表現

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(n+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n) \\
\boldsymbol{y}(n) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(n)
\end{aligned}
$$

において, 正則行列 $\boldsymbol{T}$ をひとつ取り, すべての n に対して $\boldsymbol{w}(n) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(n)$ という状態変数の座標変換を施す.

- これにより, 状態方程式は次のように変わるが, 以前の講義で見た通り, 対応する伝達関数行列は不変.

$$\boldsymbol{w}(n+1) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{w}(n) + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n)$$

$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\boldsymbol{w}(n) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(n)$$

- 行列 $\boldsymbol{T}$ として $\boldsymbol{A}$ を Jordan 標準形 に変換する行列を取ると, 次のようになる.

$$\boldsymbol{w}(n+1) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{w}(n) + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n)$$
$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\boldsymbol{w}(n) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(n)$$

- 対応する伝達関数行列は

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J})^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}.$$

- $\operatorname{adj}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J})$ を $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J})$ の余因子行列とする． $\operatorname{adj}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J})$ の各要素は z の多項式で，

$$(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J})^{-1} = \frac{1}{\det(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J})} \operatorname{adj}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J})$$

である．

- $\boldsymbol{J}$ の構造を思い出すと,

$$\det(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J})=\prod_{i=1}^{K}(z-\lambda_i)^{m_i}$$

となることがわかる．ただし, λ_i は各ブロック $\boldsymbol{J}_i$ に対応する固有値で, m_i は $\boldsymbol{J}_i$ の大きさである．

- 行列 $\boldsymbol{A}$ の特性多項式は

$$\Phi_A(z) = \det(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$$

によって定義されていた.

- 特性多項式に

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}^{-1}, \boldsymbol{I} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{I}\boldsymbol{T}^{-1}$$

および行列式に関する公式

$$\det(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2) = \det \boldsymbol{A}_1 \det \boldsymbol{A}_2$$

(ただし $\boldsymbol{A}_1$ と $\boldsymbol{A}_2$ は適合する大きさの正方行列) と, 次式を使うと⋯

$$\det \boldsymbol{T}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{T}}$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_A(z) &= \det(z\boldsymbol{T}\boldsymbol{I}\boldsymbol{T}^{-1} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}^{-1}) \\
&= \det\left(\boldsymbol{T}\left(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{T}^{-1}\right) \\
&= \det\boldsymbol{T}\det\left(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}\right)\det\boldsymbol{T}^{-1} \\
&= \det\left(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}\right).
\end{aligned}
$$

- すなわち, $\det(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J})$ は行列 $\boldsymbol{A}$ の特性多項式と一致し, 伝達関数行列の各要素の極は特性多項式の根の一部となることがわかる.

- SISO システムの 可制御正準形あるいは可観測正準形による実現では, 伝達関数の分母多項式の次数と状態空間の次元が一致するので, 特性多項式の根と伝達関数の極は (極と零点の相殺がなければ) 重複度も含めて一致する.

Lyapunov の方法

- Lyapunov の方法は, A. M. Lyapunov (1857-1918) によって考案された, 非線形システムの安定性を判定するための方法. 時代に先駆けた研究で, Lyapunov の方法が有名になったのは, Lyapunov 自身の研究から 50 年程度経過してから.

- Lyapunov の方法は, もともとは微分可能な非線形連続時間システムの局所的な (平衡点の近傍における解の挙動という意味) 安定性を解析するための手法.

- Lyapunov の方法は, 非線形連立微分方程式の安定性の問題をスカラー関数に関する微分不等式の問題という相対的に簡単な問題に帰着させる強力な方法であるが, そのスカラー関数 (**Lyapunov 関数**と呼ばれる) を構成する良い方法がないという問題を抱えている.

- 線形時不変システムに Lyapunov の方法を適用した場合には, 連続時間システムと離散時間システムの双方で, 大域的な安定性が判定でき, かつ Lyapunov 関数それ自体も解析的に構成できるという顕著な良い性質が得られる.

- Lyapunov の方法には, システムの線形近似によって安定性を判別する **Lyapunov の第一の方法**と, 状態変数の「エネルギー」に相当するスカラー関数 (**Lyapunov 関数**と呼ばれる) を使ってシステムの安定性を判別する **Lyapunov の直接法** (あるいは **Lyapunov の第二の方法**) の 2 種類がある.

- Lyapunov の第一の方法は，すでに述べた線形システムの安定性の問題に帰着される．
- Lyapunov の第二の方法では，「Lyapunov 関数が存在すればそのシステムは (何らかの意味で) 安定」という判定をおこなうが，どのような安定性を問題にするかによってバリエーションがある．この講義では，漸近安定に限定して議論を進める．

- N 次の線形時不変システム

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) \tag{♪}$$

を考える.

- 初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ は任意であるものとし, $(\boldsymbol{x}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ を初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ に対する (♪) の解とする.

- **定理**　システム (♪) が漸近安定であるための必要十分条件は, 任意の N 次の正定対称行列 $\boldsymbol{Q}$ に対し, 唯一の N 次の正定対称行列 $\boldsymbol{P}$ が存在し, $V(\boldsymbol{x}(n)) = \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n)$ と定義したとき, 以下の等式が成り立つことである.

$$
\begin{aligned}
V(\boldsymbol{x}(n+1)) - V(\boldsymbol{x}(n)) \\
= -\boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(n). \quad (☆)
\end{aligned}
$$

- $V(\boldsymbol{x}(n)) = \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n)$ を **Lyapunov 関数**と呼ぶ．線形時不変システムではこの形で良いが，非線形システムの Lyapunov 関数は必ずしも二次形式になるわけではない．

- この定理は証明も含めて重要．次ページに証明を述べる．(M. Sami Fedari and A. Visioli, Digital Control Engineering, 2/e, Elsevier, 2013 の証明に手を加えたもの).

- 証明

$V(\boldsymbol{x}(n))$ が (☆) を満たせば漸近安定:

$$V(\boldsymbol{x}(n)) = V(\boldsymbol{x}(0)) - \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{x}^T(i)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(i)$$

で, $\boldsymbol{P}$ は正定対称行列だったから,

$$V(\boldsymbol{x}(n)) \geq 0.$$

- したがって, 任意の n に対し,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{x}^T(i)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(i) \le V(\boldsymbol{x}(0)).$$

一方, $\boldsymbol{Q}$ は正定対称行列だったから, ある定数 $\lambda > 0$ が存在して, 任意の $\boldsymbol{x}$ に対し, $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \ge \lambda\|x\|^2$.

- 任意の n に対し,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda \|\boldsymbol{x}(i)\|^2 \leq V(\boldsymbol{x}(0)).$$

であり, $n \to \infty$ とすると

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda \|\boldsymbol{x}(i)\|^2 \leq V(\boldsymbol{x}(0))$$

である.

- ゆえに,

$$\lim_{n \to 0} \|\boldsymbol{x}(n)\| = 0,$$

すなわち

$$\lim_{n \to 0} \boldsymbol{x}(n) = \mathbf{0}.$$

- 漸近安定であれば (☆) を満たす $\boldsymbol{P}$ が存在:

システム $\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n)$ が漸近安定であると仮定する．このとき, $\boldsymbol{A}^n$ の行列ノルムを, ある定数 K とある c (ただし $0 \geq c < 1$) を用いて, $\|\boldsymbol{A}^n\| \leq Kc^n$ という形で上から押さえることができることに注意する.

- 行列 $\boldsymbol{P}$ を

$$\boldsymbol{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\boldsymbol{A}^T\right)^n \boldsymbol{Q} \boldsymbol{A}^n$$

と定義すると, $\|\boldsymbol{A}^n\| \leq Kc^n$ となることから, 上記右辺の無限級数は有限値に収束する.

- $\boldsymbol{P}$ は対称行列となるように構成されている.
- また, 任意の n に対し,

$$\left(\boldsymbol{A}^T\right)^n \boldsymbol{Q} \boldsymbol{A}^n$$

は半正定 (固有値が非負) で, 特に $n = 0$ の時には正定だから, $\boldsymbol{P}$ は正定対称行列である.

- $V(\boldsymbol{x}(n+1)) - V(\boldsymbol{x}(n))$ を計算すると…

$$
\begin{aligned}
&V(\boldsymbol{x}(n+1)) - V(\boldsymbol{x}(n)) \\
&\quad = \boldsymbol{x}^T(n+1)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n+1) - \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n) \\
&\quad = \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) - \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n) \\
&\quad = \boldsymbol{x}^T(n)\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{x}(n)
\end{aligned}
$$

- 以下の計算により, $\boldsymbol{P}$ が (☆) を満たすことが確認できる.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}\\
&\quad=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\boldsymbol{A}^T\right)^n\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\boldsymbol{A}^T\right)^n\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^n\\
&\quad=-\boldsymbol{Q}
\end{aligned}
$$

- $\underline{\boldsymbol{P}\text{ の一意性}}$

初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ は任意だったから，仮に (☆) を満たす $\boldsymbol{P}$ が存在したとすると，

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{Q}$$

という等式を満たさなければならない．

- これを

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}$$

と書き直し, 右辺の $\boldsymbol{P}$ に $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{Q}$ を代入すると,

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}^T)^2 \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}^2$$

となる.

- この手順を繰り返すと, 任意の L に対し,

$$\boldsymbol{P} = \sum_{n=0}^{L} \left(\boldsymbol{A}^T\right)^n \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^n + \left(\boldsymbol{A}^T\right)^{L+1} \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{L+1}$$

となる.

- 先の式で $L \to \infty$ とすると,

$$\lim_{L\to\infty} (\boldsymbol{A}^T)^{L+1} \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}^{L+1} = \boldsymbol{0}$$

なので,

$$\boldsymbol{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\boldsymbol{A}^T\right)^n \boldsymbol{Q} \boldsymbol{A}^n$$

でなければならない.

- 上述の証明の過程で,

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{Q} \qquad (\text{☆})$$

を満たす正定対称行列 $\boldsymbol{P}$ を求める問題が出て来たが, 方程式 (☆) を (離散時間)**Lyapunov 方程式**と呼ぶ. 上述のように無限級数を使えば Lyapunov 方程式の解を構成することができる.

- 非線形離散時間システム

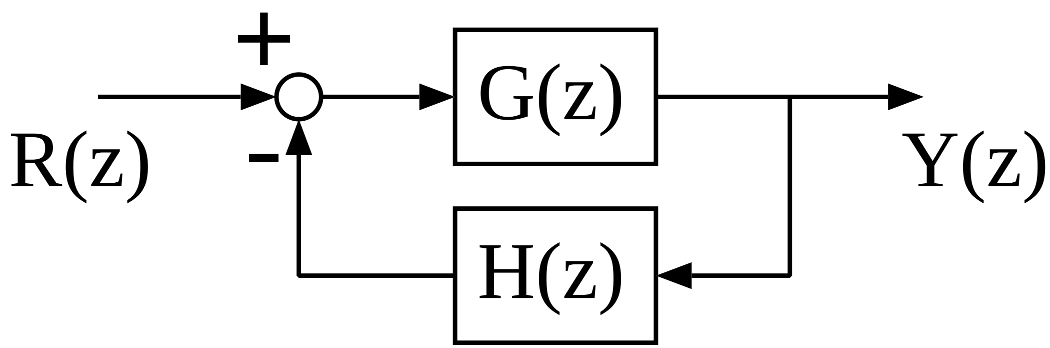
$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(n))$$

に対する Lyapunov の方法については W. M. Haddad and V. Challaboina, Nonlinear Dynamical Systems and Control, Princeton University Press, 2008 を参照. 線形システムのそれに相当する定理が得られているが, 証明はかなり大変.

Nyquist の安定条件

- 前回の講義では, **開ループの**伝達関数 $G(z)$ の安定性を判別する方法のみ議論した.
- 制御工学では, 出力を入力に帰還してフィードバックループ作ることによって作られる伝達関数が安定になるかどうかが問題となる. これを判定する方法のひとつが, **Nyquist の安定条件**である.

- Nyquist の安定条件には, フィードバックループの作り方によって色々な述べ方があるが, ここでは以下のようなシステムを考える.



- $\mathcal{Z}[r] = R(z)$, $\mathcal{Z}[y] = Y(z)$ とし, $R(z)$ から $Y(z)$ への伝達関数を T とすると,
$T(z) = \dfrac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}$ である.

- $G(z) = \dfrac{N_G(z)}{D_G(z)}, H(z) = \dfrac{N_H(z)}{D_H(z)}$ とする．$N_G(z)$, $D_G(z)$, $N_H(z)$, $D_H(z)$ は 既知の多項式で, $N_G(z)$ と $D_G(z)$, $N_H(z)$ と $D_H(z)$ は既約とする．

- 領域 Γ が指定され, その境界 $\partial\Gamma$ は単一閉曲線であるものとする.

- Γ の内部の $T(z)$ の極の数を調べるために偏角の原理を利用することができる．これを複素単位円の外部に適用したものが離散時間版の Nyquist の安定条件で, 複素右半平面に適用したものが連続時間版の Nyquist の安定条件である.

- $G(z)H(z)$ および $1+G(z)H(z)$ は次のように書ける.

$$
\begin{aligned}
G(z)H(z) &= \frac{N_G(z)N_H(z)}{D_G(z)D_H(z)} \\
1+G(z)H(z) &= 1+\frac{N_G(z)N_H(z)}{D_G(z)D_H(z)} \\
&= \frac{D_G(z)D_H(z)+N_G(z)N_H(z)}{D_G(z)D_H(z)}
\end{aligned}
$$

- $T(z)$ は次のように書ける.

$$
\begin{aligned}
T(z) &= \frac{\dfrac{N_G(z)}{D_G(z)}}{1 + \dfrac{N_G(z)N_H(z)}{D_G(z)D_H(z)}} \\
&= \frac{D_H(z)N_G(z)}{D_G(z)D_H(z) + N_G(z)N_H(z)}
\end{aligned}
$$

- Γ で $G(z)$ と $H(z)$ の極零相殺がないとき:
  - ▷ Γ における $T(z)$ の極は, $1 + G(z)H(z)$ の零点と一致する．これは未知である．
  - ▷ Γ における $1+G(z)H(z)$ の極は, $G(z)H(z)$ の極と一致する．これは既知である．
- $\partial\Gamma$ には $1 + G(z)H(z)$ および $G(z)H(z)$ の極および零点は存在しないものと仮定する．

- $1+G(z)H(z)$ による $\partial\Gamma$ の像を $(1+GH)(\partial\Gamma)$ と書く．これを描画することにより，領域 Γ にある $1+G(z)H(z)$ の零点の数 (未知) を求めたい．

- $\partial\Gamma$ には時計回りの向きを付ける．向きの付け方が複素解析の慣習と異なるので注意．文献によって向きの付け方にバリエーションがある．以下同じ．

- 領域 Γ に $1+G(z)H(z)$ の 1 個の極 λ があり, 零点がないときには, $1+G(\lambda)H(\lambda)=\infty$ だから, $(1+GH)(\partial\Gamma)$ は無限遠点のまわりを時計回りに 1 周回る. 原点は無限遠点の反対にあるから, $(1+GH)(\partial\Gamma)$ は原点のまわりを反時計回りに 1 周回る.

- 領域 Γ に $1+G(z)H(z)$ の 1 個の零点 ξ があり, 極がないときには, $1+G(\xi)H(\xi)=0$ だから, $(1+GH)(\partial\Gamma)$ は 原点 のまわりを 時計回り に 1 周回る.

- 領域 Γ に $1+G(z)H(z)$ の極および零点が複数あるとき, 上述の原点のまわりの回転の効果は重複する.

- N を $(1+GH)(\partial\Gamma)$ が原点のまわりを反時計回りに回る回数とし (逆回転は -1 回転と数える), Z と P を $1+G(z)H(z)$ の Γ における零点と極の数とすると,

$$\underbrace{N}_{\text{図を見て数える}} = \underbrace{P}_{\text{既知}} - \underbrace{Z}_{\text{これを知りたい}} .$$

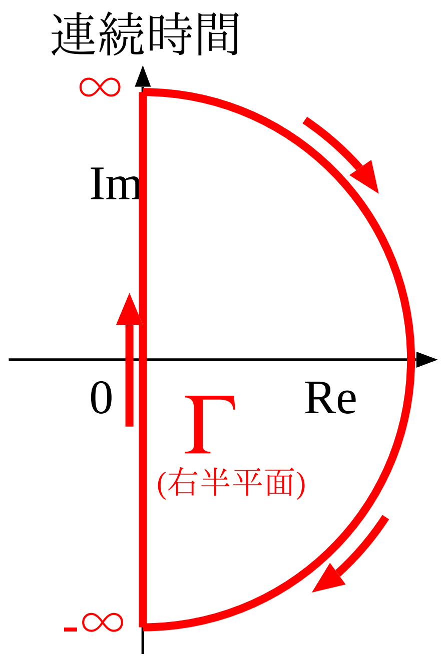
である.

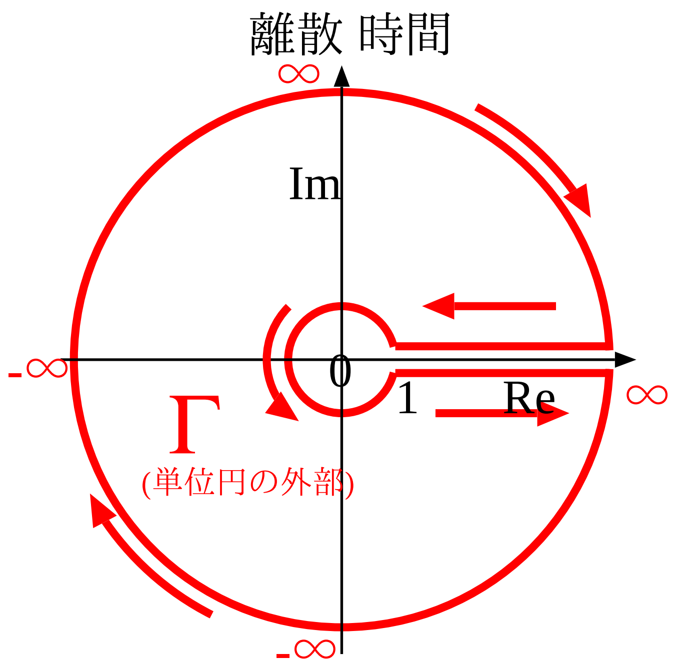
- 上述のフィードバックシステムが安定であるためには, $Z = 0$, すなわち $N = P$ でなければならない．この条件を **Nyquist の安定条件**と呼ぶ.

- $N = Z - P$ という式自体も **Nyquist の条件**と呼ばれることがある.

- 上記のかわりに，通常は，$G(z)H(z)$ による $\partial\Gamma$ の像 (これを $G(z)H(z)$ の **Nyquist 軌跡**, **Nyquist 線図**などと呼ぶ) が -1 のまわりを回る回数を数える ($(1+GH)(\partial\Gamma)$ が原点のまわりを回る回数と同じ).
- Γ の取り方を次ページに示す.

- N を時計回りに数える流儀もあるので注意. この流儀では, $-N = P - Z$ となる.





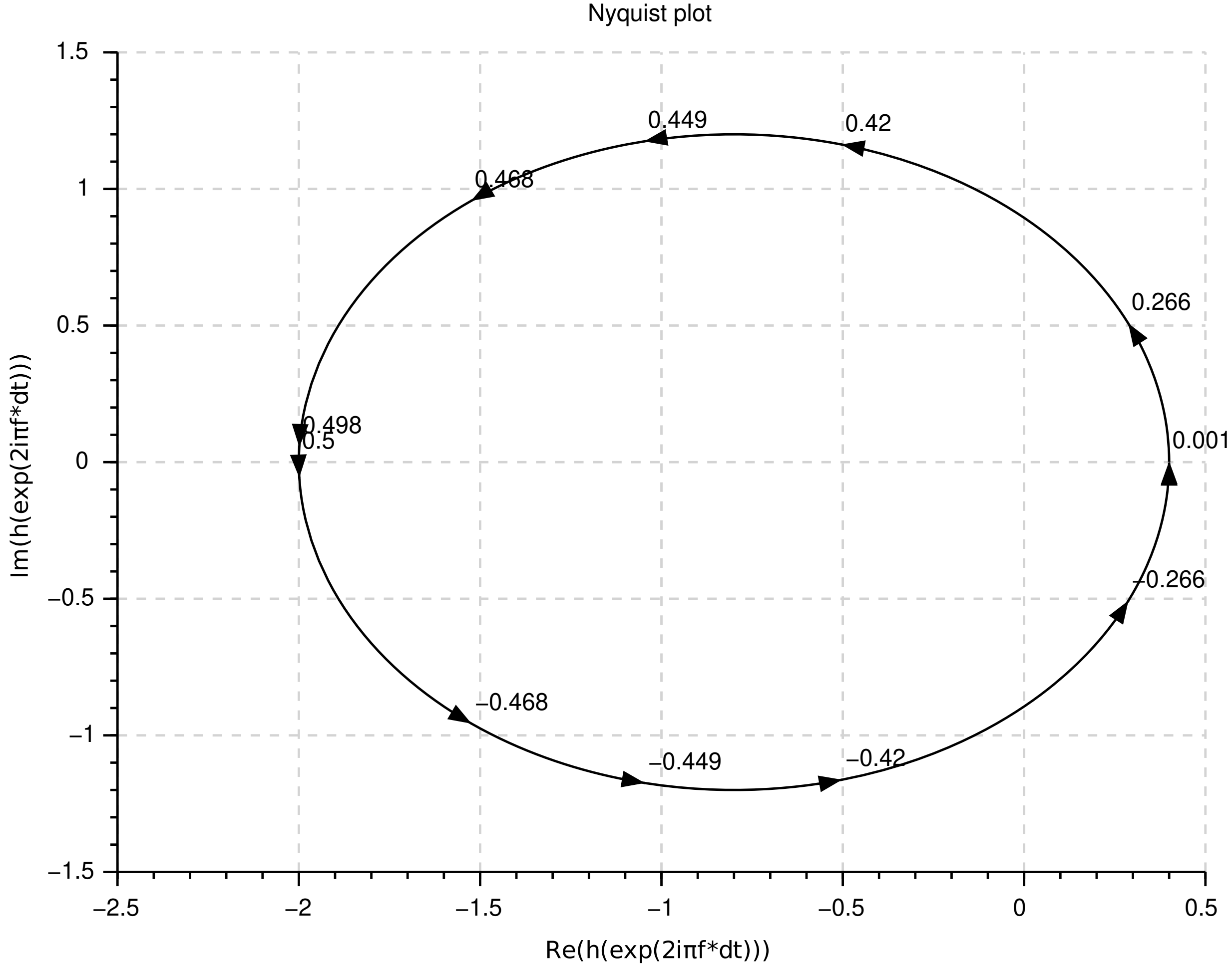
- 上述の経路上に $G(z)$ や $H(z)$ の極や零点があるときには, その極や零点を避けるように経路を調整する必要がある (詳細は略す).

例

- $G(z) = \dfrac{z}{z + \frac{3}{2}}$, $H(z) = 1$ とする.
- 確認のために, Z を求めておく.

- $\frac{G(z)}{1+G(z)H(z)} = \frac{1}{2}\frac{z}{z+\frac{3}{4}}$ だから, このフィードバックシステムは安定で, よって $Z = 0$ である. $G(z)H(z)$ は単位円の外部に 1 個の極を持つから, $P = 1$ であり, したがって $N = P - Z = 1$ で, ゆえに Nyquist 軌跡は -1 のまわりを反時計回りに 1 周する筈である. 以下のコードの実行結果を次ページに示す.

```
num=poly(0,'z');
den=poly(-3/2,'z');
G=num/den;
sl=syslin('d',G);
nyquist(sl)
```

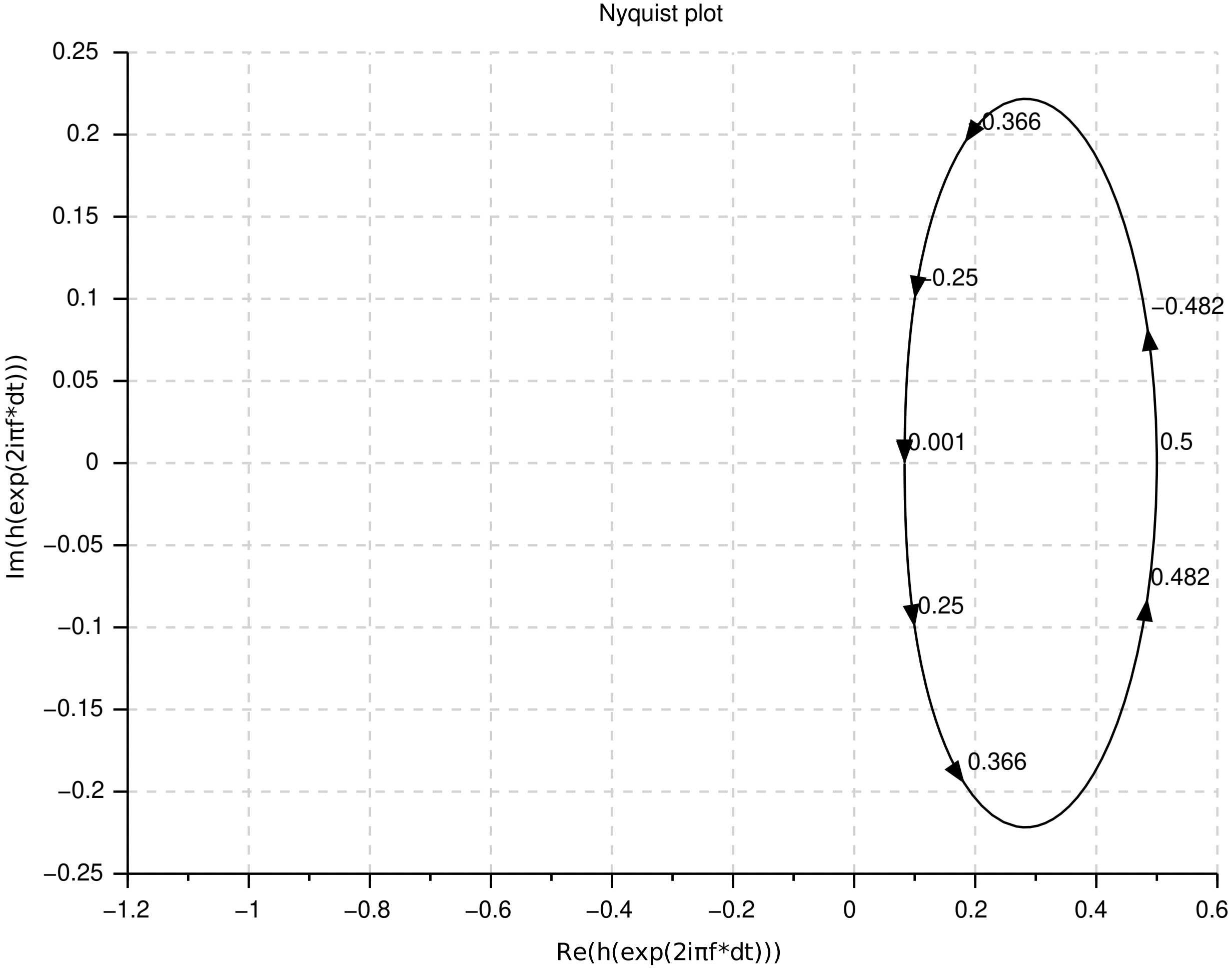

Nyquist plot
Im(h(exp(2iπf*dt)))
Re(h(exp(2iπf*dt)))
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
0.449
0.42
0.468
0.266
0.498
0.5
0.001
−0.266
−0.468
−0.449
−0.42

例

- $G(z) = \dfrac{z}{(z+2)(z+3)}$, $H(z) = 1$ とする.
- 確認のために, Z を求めておく.

- $\dfrac{G(z)}{1+G(z)H(z)} = \dfrac{1}{z^2+5z+7}$ より，このフィードバックシステムの極は $-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}j$ で，よって $Z=2$ である．$G(z)H(z)$ は単位円の外部に 2 個の極を持つから，$P=2$ であり，したがって $N=P-Z=0$ で，ゆえに Nyquist 軌跡は -1 のまわりを 回転しない筈である．以下のコードの実行結果を次ページに示す．

```
num=1;
den=poly([-2 -3],'z');
G=num/den;
sl=syslin('d',G);
nyquist(sl)
```



Nyquist plot
Im(h(exp(2iπf*dt)))
Re(h(exp(2iπf*dt)))
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
−0.05
−0.1
−0.15
−0.2
−0.25
−1.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
-0.366
-0.25
−0.482
0.001
0.5
0.482
0.25
0.366