ディジタル制御 第 4 回

ディジタル制御系の安定性 (1) 安定性の定義と安定性判別法

安定性とは

- 安定性とは: 系の状態が, 何らかの原因で一時的に平衡状態又は定常状態からはずれても, その原因がなくなれば, もとの平衡状態又は定常状態に復帰するような特性. (JIS Z8116 自動制御用語 – 一般)

- 安定性に関する議論をする際には, 内部状態に着目する場合と, 入出力関係に着目する場合がある.
- 今回の講義では入出力関係に着目して議論を進める.

- 伝達関数表現されたシステムから出発し, 入出力関係に基づいてその安定性について議論するときには, 有界入力有界出力安定(Bounded-Input Bounded-Output 安定;BIBO 安定) という概念がよく使われる.

- **定義** 伝達関数 $G(z)$ で記述された線形時不変システムが**有界入力有界出力安定 (Bounded-Input Bounded-Output 安定;BIBO 安定)** であるとは, システムに印加された入力が有界であるとき, 対応する出力も安定であることをいう.

- **定義** プロパーな伝達関数 $G(z)$ が安定であるとは, $G(z)$ の極がすべて複素単位円の内部にあることをいう.

- 以下の議論では, $G(z)$ の BIBO 安定性と $G(z)$ の安定性の関係について述べたいのであるが $\cdots$
- このために, 伝達関数で表現されたシステムのインパルス応答を求める必要があるので, まずこれについて説明する.

伝達関数とインパルス応答

- 今回の講義では, 因果的なシステムおよび信号のみを検討の対象とする.

- プロパーな有理関数の伝達関数

$$G_0(z)$$

によって表現されたシステムが与えられ, これが

$$G_0(z) = D + G(z)$$

のように定数 D と厳密にプロパーな伝達関数 $G(z)$ の和であらわされているものとする.

- $G(z)$ への入力を

$$u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}},$$

$G(z)$ からの出力を

$$y = (y(n))_{n\in\mathbb{N}}$$

とし, これらの z 変換を $U(z)$, $Y(z)$ とする.

- $Y(z) = G_0(z)U(z) = DU(z) + GU(z)$ で, $DU(z)$ は入力の定数倍である.
- $g = (g(n))_{n\in\mathbb{N}} = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)]$ とすると ($\mathcal{Z}^{-1}[\cdot]$ は逆 z 変換作用素), y は u と g の畳み込みによって与えられる.

- 離散時間インパルスを δ とする:
$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$
- g は $G(z)$ に相当するシステムのインパルス応答である．これを $G(z)$ から計算したい．

- $G(z)$ が以下のようになっているものとする.

$$G(z) = \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_M}{z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N}$$

ただし, $N > M$ である.

- 分母多項式を $A(z)$, 分子多項式を $B(z)$ とする. すなわち:

$$A(z) = z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N$$
$$B(z) = b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_M$$

- 分母多項式 $A(z)$ に関する代数方程式 $A(z) = 0$ の根 (解) (解と根は同義; 単に分母多項式の根とも呼ぶ) を, $G(z)$ の 極と呼ぶ.
- $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ を $G(z)$ の極とすると (重複を許す), $A(z)$ は (重複を許して) 次のように一次多項式の積で書き表される.

$$A(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_N)$$

- 分子多項式 $B(z)$ に関する代数方程式 $B(z) = 0$ の根 (解) を, $G(z)$ の 零点と呼ぶ.
- $\{\beta_1, \ldots, \beta_M\}$ を $G(z)$ の零点とすると (重複を許す), $B(z)$ は (重複を許して) 次のように一次多項式の積で書き表される.

$$B(z) = b_0(z - \beta_1)(z - \beta_2)\cdots(z - \beta_M)$$

部分分数展開

- システムの安定性は伝達関数の極によって決定されるという事実を述べるのであるが…
- 状態空間表現によらず, 伝達関数だけでこれを説明するためには, 部分分数展開という概念が必要になる.
- よって, 部分分数展開について説明する.

- $G(z)$ を

$$G(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{z - \alpha_k}$$

のように分解表現することを, $G(z)$ の部分分数展開と呼ぶ.

- 前ページの表現は極がすべて 1 位の場合で, 2 位以上の極があるときにはもう少し複雑になる.
- 以下で, このような表現が可能であることを確認し, 係数 c_k の計算法を述べる.

▷ 極に重複がない場合 (1 位の極)

- まず $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ がすべて相異なる (極に重複がない) 場合を考える.

- $G(z)$ は $z = \alpha_1$ に位数 1 の極を持つから,

$$G(z) = \frac{c_1}{z - \alpha_1} + G_2(z)$$

と書ける.

  ▷ c_1 は定数 (あとで定める)

  ▷ $G_2(z)$ は $z = \alpha_1$ で正則な関数

- $\dfrac{c_1}{z-\alpha_1}$ は $z=\alpha_2$ で正則だから，$G(z)$ と $G_2(z)$ はともに $z=\alpha_2$ に位数 1 の極を持ち，

$$G_2(z)=\frac{c_2}{z-\alpha_2}+G_3(z)$$

と書ける．$G_3(z)$ は $z=\alpha_1,\alpha_2$ で正則である．

- 以下同様に,

$$G_k(z) = \frac{c_k}{z-\alpha_k} + G_{k+1}(z)$$

と書ける．$G_{k+1}(z)$ は $z = \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ で正則であるようにできるので $\cdots$

- $G_N(z) = \dfrac{c_N}{z-\alpha_N} + \underbrace{G_{N+1}(z)}_{\text{実は零になる (後述)}}$ と書け,

  $G_{N+1}(z)$ は $z=\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ で正則である．一方, $G_k(z)$ は $G(z)$ から**極を 1 個ずつ減らす**ように構成されていたから, $G_{N+1}(z)$ は極を持たず, したがって正則である．

- まとめると $\cdots$

- $G(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{z - \alpha_k} + G_{N+1}$ となっていたが, 上記の左辺は $z \to \infty$ としたとき有界, よって右辺も有界. したがって, Liouville の定理によって, G_{N+1} は定数.
- $\frac{B(z)}{A(z)}$ の分子の次数は分母の次数未満だったから, $G_{N+1} = 0$ である.

- 以上によって, z の有理関数で与えられた厳密にプロパーな伝達関数は, 極に重複がないときには,

$$G(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{z - \alpha_k} \qquad (♪)$$

のように表現されることがわかる．上記のような表現を $G(z)$ の 部分分数展開 と呼ぶ.

- $\{c_k\}_{k=1,\ldots,N}$ を求める方法は 2 通りある.
  - ▷ $c_k = \lim_{z\to\alpha_k}(z-\alpha_k)G(z)$.
  - ▷ (♪) を $b_0 z^M + \cdots + b_M = c_1 \prod_{k\neq 1}(z-\alpha_k) + \cdots c_N \prod_{k\neq N}(z-\alpha_k)$ と書き直し, $\{c_1,\ldots,c_N\}$ を未知変数と解釈して, 多項式の各次数の係数に関する連立一次方程式を立てて解く.

▷ 極に重複がある場合

- $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_D\}$ を相異なる極とし, それぞれに重複度を $\rho_1, \ldots, \rho_D$ とする.
- $G(z)$ を $z = \alpha_1$ のまわりで Laurent 展開すると,

$$G(z) = \frac{c_{1,\rho_1}}{(z-\alpha_1)^{\rho_1}} + \cdots + \frac{c_{1,1}}{(z-\alpha_1)} + G_2(z).$$

となり, $G_2(z)$ は $z = \alpha_1$ で正則である.

- 以下同様に,

$$
\begin{aligned}
G(z) = \frac{c_{1,\rho_1}}{(z-\alpha_1)^{\rho_1}} + \cdots + \frac{c_{1,1}}{(z-\alpha_1)} \\
+ \cdots \\
+ \frac{c_{D,\rho_D}}{(z-\alpha_D)^{\rho_D}} + \cdots + \frac{c_{D,1}}{(z-\alpha_D)} \\
+ \underbrace{G_{N+1}(z)}_{\text{先と同じ理由でこの項は零になる}}
\end{aligned}
$$

- 極に重複がない場合と同様に, 上記の左辺と右辺の最終項を除いた和を比較すると, いずれも分子の次数は分母の次数未満であるから, $G_{N+1}(z) = 0$ でなければならない.

- よって,

$$
\begin{aligned}
G(z) = \frac{c_{1,\rho_1}}{(z-\alpha_1)^{\rho_1}} + \cdots + \frac{c_{1,1}}{(z-\alpha_1)} \\
+ \cdots \\
+ \frac{c_{D,\rho_D}}{(z-\alpha_D)^{\rho_D}} + \cdots + \frac{c_{D,1}}{(z-\alpha_D)}
\end{aligned}
$$

のように表現されることがわかる．先ほどと同様に, これを $G(z)$ の 部分分数展開 と呼ぶ.

- $\{c_{k,l}\}_{1\le k\le D, 1\le l\le \rho_k}$ を求める方法は2通りある.
  - ▷ 連立一次方程式に帰着させる方法は先ほどと同じ.
  - ▷ 個別に計算する方法を次ページ以降で述べる.

- まず,

$$
\begin{aligned}
&(z-\alpha_1)^{\rho_1}G(z) = \\
&\qquad c_{1,\rho_1} + \cdots + c_{1,1}(z-\alpha_1)^{\rho_1-1} \\
&\qquad\qquad + (z-\alpha_1)^{\rho_1}G_2(z)
\end{aligned}
$$

で, $G_2(z)$ は $z=\alpha_1$ で解析的だから…

$$
\begin{aligned}
c_{1,\rho_1} &= \lim_{z\to\alpha_1} (z-\alpha_1)^{\rho_1} G(z) \\
c_{1,\rho_1-1} &= \lim_{z\to\alpha_1} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left((z-\alpha_1)^{\rho_1} G(z)\right) \\
c_{1,\rho_1-2} &= \lim_{z\to\alpha_1} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-\alpha_1)^{\rho_1} G(z)\right) \\
&\cdots \\
c_{1,1} &= \lim_{z\to\alpha_1} \frac{1}{(\rho_1-1)!}\frac{d^{\rho_1-1}}{dz^{\rho_1-1}}\left((z-\alpha_1)^{\rho_1} G(z)\right)
\end{aligned}
$$

- 各 k に対し同様の計算をおこなう (次ページ).

$$
\begin{aligned}
c_{k,\rho_k} &= \lim_{z\to\alpha_k} (z-\alpha_k)^{\rho_k} G(z) \\
c_{k,\rho_k-1} &= \lim_{z\to\alpha_k} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left((z-\alpha_k)^{\rho_k} G(z)\right) \\
c_{k,\rho_k-2} &= \lim_{z\to\alpha_k} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-\alpha_k)^{\rho_k} G(z)\right) \\
&\cdots \\
c_{k,1} &= \lim_{z\to\alpha_k} \frac{1}{(\rho_k-1)!}\frac{d^{\rho_k-1}}{dz^{\rho_k-1}}\left((z-\alpha_k)^{\rho_k} G(z)\right)
\end{aligned}
$$

部分分数展開とインパルス応答

- 先に述べた手順によって, 伝達関数 $G(z)$ が,

$$G(z) = \sum_{1 \le k \le D} \sum_{1 \le l \le \rho_D} \frac{c_{k,l}}{(z - \alpha_k)^l}$$

のように部分分数展開されているものとする.

- $G(z)$ を逆 z 変換すれば, $G(z)$ のインパルス応答を求めることができる.

- 逆 z 変換は線形作用素だから, $G(z)$ に対応するシステムのインパルス応答を求めるには, 個別に
$$\frac{1}{(z-\alpha_k)^l}$$
を逆 z 変換してから, それらに $c_{k,l}$ を乗じて足し合わせればよい.

▷ 各項の逆 z 変換

- $a \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-a}\right] = \begin{cases} a^{n-1}, & n \geq 1, \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}.$$

- 確認: 上式右辺を x とし, これを z 変換すると, 収束領域において,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Z}[x] \\
&\quad = z^{-1} + az^{-2} + \cdots + a^{n-1}z^{-n} + \cdots \\
&= z^{-1}(1 + (a/z) + \cdots + (a/z)^{n-1} + \cdots) \\
&\qquad = z^{-1}\frac{1}{1-(a/z)} = \frac{1}{z-a}
\end{aligned}
$$

- x を因果的な信号, 信号 y を

$$y(n) = \begin{cases} nx(n), & n \geq 0, \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

によって定まる信号とする.

- 第 2 回で述べたように, x と y の z 変換を $X(z), Y(z)$ とすると,

$$Y(z) = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

である.

- $x_k = \mathcal{Z}^{-1}\left[\dfrac{1}{(z-a)^k}\right]$ とし, 帰納的に $x_k(n)$ を求める.

- $x_1 = \mathcal{Z}^{-1}\left[\dfrac{1}{z-a}\right]$はすでに求められており,

$$x_1(n) = \begin{cases} a^{n-1}, & n \geq 1, \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

である.

- x_k が得られていると仮定して x_{k+1} を求める.

- y_k を, $n \geq 0$ に対し $y_k(n) = nx_k(n)$ によって定義される因果的な信号とし,

$$Y_k(z) = \mathcal{Z}[y_k]$$

とおく.

- 先に述べたように,

$$Y_k(z) = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[x_k]$$

である.

- x_k の定義は

$$\mathcal{Z}[x_k] = \frac{1}{(z-a)^k}$$

だから, 以下が成り立つ:

$$Y_k(z) = \frac{kz}{(z-a)^{k+1}}.$$

- よって

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^{k+1}}\right] \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{k} z^{-1} Y_k(z)\right].
\end{aligned}
$$

- $Y_k(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n x_k(n) z^{-n}$ だから,

$$
\begin{aligned}
z^{-1} Y_k(z) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} n x_k(n) z^{-n-1} \\
&= \sum_{n\geq 1} (n-1) x_k(n-1) z^{-n}.
\end{aligned}
$$

- よって,

$$x_{k+1}(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{k} x_k(n-1), & n \geq 1, \\ 0, & \text{それ以外}. \end{cases}$$

- 帰納的に同様の計算を繰り返し, $x_1(n)$ の値を代入すると, $k \geq 1$ に対し,

$$x_{k+1}(n) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)\cdots(n-k)}{k!} a^{n-k-1}, & n > k, \\ 0, & \text{それ以外}. \end{cases}$$

- 第 2 回の講義で見たように, 単位ステップ u_s ($n < 0$ で $u_s(n) = 0$, $n \geq 0$ で $u_s(n) = 1$ となる信号) に対し,

$$\mathcal{Z}[u_s] = \sum_{n \in \mathbb{N}} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

- $\dfrac{1}{z-1} = z^{-1}\mathcal{Z}[u_s]$ だから,

$$\mathcal{Z}^{-1}[\frac{1}{z-1}]$$

は, u_s を時間軸に関して 1 シフトした信号になる.

- 三角関数は, a が複素数であるとき, $\dfrac{1}{(z-a)}$ と $\dfrac{1}{z-\bar{a}}$ を対にすることで得られる ($\bar{a}$ は a の複素共役). この性質は Laplace 変換と同じ.
- 多くの場合, 有理関数の逆 z 変換は, 有理関数の逆 Laplace 変換ほど簡単な形にならない.

▷ k, a の値と $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^k}\right]$ の挙動

- $x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}} = \mathcal{Z}^{-1}\left[\dfrac{1}{(z-a)^k}\right]$ とする.
- $\lim_{n\to\infty} x(n)$ の値を知りたい.

- 第 2 回で述べたように, $(x(n))$ が有限の極限に収束し, かつ $\lim_{z\to 1}(z-1)\mathcal{Z}[x]$ が意味を持つときには,

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)\mathcal{Z}[x]$$

となるのであるが, 上式は, $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ が有限の極限に収束することが事前にわかっている場合にしか使えない.

- よって，先に述べた逆 z 変換の結果から，極限を直接計算する．

- $k = 1$ のときは簡単
- $n \geq 1$ に対し $x(n) = a^{n-1}$ だから,
  - ▷ $|a| < 1$ のとき, $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$.
  - ▷ $|a| > 1$ のとき, $\lim_{n\to\infty} x(n) = \infty$.
  - ▷ $|a| = 1$ のとき, $n \geq 1$ に対して $|x(n)| = 1$ なので, $x(n)$ は単位円上に留まる (収束するとは限らない).

- 以上のように我々は極限を直接計算したのであるが…

- 一方,

$$\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z-a}$$

は $a\neq 1$ であればつねに零だから, この極限の値を数列 $(x(n))$ の収束性の判定に使うことができないことが確認できる.

- $k > 1$ のときは少し面倒.
- 先に見たように,$n > k - 1$ に対し,

$$x(n) = \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!} a^{n-k}$$

である

- 先の式では x_{k+1} を求めたが, 今使うのは x_k である.
- 我々は $n \to \infty$ とするのであるから, 以下では始めから $n > k-1$ であると仮定しておく.
- a の絶対値に応じて分類して議論する.

- $|a| < 1$ のとき:

$$|x(n)| \le |a|^k \frac{n^k}{(k-1)!} |a|^n$$

である. $|a| < 1$ であると仮定したから,

$$\lim_{n\to\infty} n^k |a|^n = 0.$$

したがって,

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = 0.$$

- $|a| = 1$ のとき: $|a| = 1$ と仮定したから,

$$|x(n)| \geq \frac{(n-k)^k}{(k-1)!}$$

である. よって,

$$\lim_{n \to \infty} x(n) = \infty$$

.

- $|a| > 1$ のとき: この場合は,

$$|x(n)| \geq \frac{(n-k_1)^k}{(k-1)!}|a|^{n-k}$$

で, $|a| > 1$ と仮定したから,

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \infty.$$

z 変換によって差分方程式を解く

- 講義第 2 回で取り挙げた差分方程式

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k y(n+k) = \sum_{k=0}^{q} \beta_k u(n+k)$$

を考える $(p \geq q)$.

- この差分方程式の両辺を z 変換すると, 以下が得られる.

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k z^k Y(z) + (\text{初期値依存項 A})$$

$$= \sum_{k=0}^{q} \beta_k z^k U(z) + (\text{初期値依存項 B})$$

- 先の式は,

$$
\begin{aligned}
Y(z) = {} & \frac{\sum_{k=0}^{q} \beta_k z^k}{\sum_{k=0}^{p} \alpha_k z^k} U(z) \\
& - \frac{1}{\sum_{k=0}^{p} \alpha_k z^k} (\text{初期値依存項 A}) \\
& + \frac{1}{\sum_{k=0}^{p} \alpha_k z^k} (\text{初期値依存項 B})
\end{aligned}
$$

という形に書き直すことができる.

- 前ページの各項を部分分数展開してから各項の逆 z 変換を求めることにより，差分方程式の解を求めることができる．

伝達関数とステップ応答

- u_s を単位ステップとし, $U_s(z) = \mathcal{Z}[u_s]$ とすると, $U_s(z) = \dfrac{z}{z-1}$ であった.
- 伝達関数 $G(z)$ で表現されたシステムのステップ応答は, $G(z)\dfrac{z}{z-1}$ を逆 z 変換することにより求められる.

伝達関数と安定性

- プロパーな有理関数の伝達関数 $G(z)$ で記述された線形時不変システムを考える. $G(z)$ のインパルス応答を $g = (g(n))_{n \in \mathbb{N}} = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)]$ とする.
- **定義 (再掲)** $G(z)$ が安定であるとは, $G(z)$ の極がすべて複素単位円の内部にあることをいう.

- **定義 (再掲)** 伝達関数 $G(z)$ で記述された線形時不変システムが有界入力有界出力安定 (Bounded-Input Bounded-Output 安定;BIBO 安定) であるとは, システムに印加された入力が有界であるとき, 対応する出力も安定であることをいう. 以下ではこれを略して $G(z)$ が BIBO 安定であると呼ぶ.

- 以下の 3 条件は等価である.
  1. $G(z)$ が BIBO 安定
  2. $G(z)$ が安定
  3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} |g(n)| < \infty$.
- 証明を次ページに示す.

- $1 \Rightarrow 2$: 対偶を示す.
  - ▷ $G(z)$ が単位円の外部に極を持つとき:インパルス応答が無限大に発散するから, BIBO 安定でない.

- $\triangleright$ $G(z)$ の部分分数展開が $\frac{1}{(z-a)^k}$ という項を持ち, $|a| = 1$ であるとき：
  - $*$ $k > 1$ ならインパルス応答が無限大に発散するから, BIBO 安定でない.
  - $*$ $k = 1$ なら, $U(z) = \frac{1}{z-a}$ という入力 (有界である) を印加すると出力が無限大に発散するから, BIBO でない.

- $2 \Rightarrow 3$: このとき, ある定数 K と定数 c(ただし $0 \leq c < 1$) が取れ, 十分大きい n に対し $|g(n)| < Kc^n$ とできるから, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |g(n)| < \infty$ である.

- $3 \Rightarrow 1$: このとき, 入力 $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ が ある定数 K に対して $|u(n)| < K$ を満たせば, この入力に対する応答は $|y(n)| = |\sum_{k=0}^{n} g(n-k)u(k)| \leq K \sum_{n\in\mathbb{N}} |g(n)| < \infty$ であり, よって BIBO 安定である.

極・零点の安定性

- 伝達関数 $G(z)$ が与えられ, α, β がそれぞれ $G(z)$ の極および零点であるものとする.
- $|\alpha| < 1$ であるとき，これを安定な極と呼ぶ. $|\alpha| \geq 1$ であるとき, これを不安定な極と呼ぶ.
- $|\beta| < 1$ であるとき，これを安定な零点と呼ぶ. $|\beta| \geq 1$ であるとき，これを不安定な零点と呼ぶ.

- 以上の定義のもとで, 伝達関数 $G(z)$ が安定であることは, そのすべての極が安定であることと等価である.
- 伝達関数の零点の安定性は 伝達関数それ自体の安定性とは無関係.

▷ (参考) 連続時間システムでは $\cdots$

- 連続時間の 伝達関数 $G_c(s)$ が与えられ, α_c, β_c がそれぞれ $G_c(s)$ の極および零点であるものとする.
- $\mathrm{Re}\,\alpha_c < 0$ であるとき, これを安定な極と呼ぶ. $\mathrm{Re}\,\alpha_c \geq 0$ であるとき, これを不安定な極と呼ぶ.
- $\mathrm{Re}\,\beta_c < 0$ であるとき, これを安定な零点と呼ぶ. $\mathrm{Re}\,\beta_c \geq < 0$ であるとき, これを不安定な零点と呼ぶ.

安定性判別法

- 伝達関数の安定性を判別するには, 伝達関数の極 (分母多項式の根) をコンピュータで数値的に求めればよいが $\cdots$
- 歴史的な理由から, 極を求めることなく伝達関数の安定性を判別する方法がいくつか知られている.

- 代表的なものは, 双一次変換と呼ばれる変換によって Routh-Hurwitz の方法に帰着させる方法と, **Jury の方法**と呼ばれる方法.

双一次変換

- $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ という形の関数を双一次変換と呼ぶ ((a,b,c,d) はパラメータ).
- 離散時間システムの安定性判別に使うのは, 双一次変換の特別な場合で, $\alpha > 0$ に対し,

$$s = \alpha \frac{z-1}{z+1}. \qquad (♪)$$

- 写像 (♪) による (複素) 単位円の像を考える.
- $z = e^{j\theta}$ $(-\pi < \theta \leq \pi)$ とする. これにより, z は単位円を一周する.
- z を (♪) に代入すると,

$$s = \frac{e^{j\theta} - 1}{e^{j\theta} + 1} = \frac{e^{j\frac{\theta}{2}}(e^{j\frac{\theta}{2}} - e^{-j\frac{\theta}{2}})}{e^{j\frac{\theta}{2}}(e^{j\frac{\theta}{2}} + e^{-j\frac{\theta}{2}})} = j \tan \frac{\theta}{2}.$$

よって, (♪) によって単位円は虚軸に移る.

- 写像 (♪) によって原点は $-\alpha$ に移るから, 写像 (♪) は複素単位円を複素左半平面に移すことがわかる.
- (♪) を z について解くと,

$$z = \frac{\alpha + s}{\alpha - s} \tag{★}$$

となる.

- $G(z)$ の分母多項式に $z = \frac{\alpha+s}{\alpha-s}$ を代入してから, 適切な K を取り, $(\alpha - s)^K$ を乗じて多項式に直し, Routh-Hurwitz の方法を適用することにより, $G(z)$ の安定性を判別することができる. ただし, 計算量が多く, 効率の良い方法ではない.

- Routh-Hurwitz の方法は制御工学の範囲なので, この講義では述べない.

Jury の方法

- Jury の方法は, Jury 表と呼ばれる Routh 表と類似した表を作成し, それを使って安定性を判別する. 結果のみ述べる.
- Jury の方法には色々な述べ方があるが, この講義では, G. F. Franklink et al., Digital Control of Dynamical Systems, 2/e, Addison-Weskey, 1990 のものを紹介する.

準備 $G(z)$ の分母多項式を $A(z) = a_0 z^N + \cdots + a_N$ とする．必要なら全体に -1 を乗じ，$a_0 > 0$ となるようにしておく．

1.1 $A(z)$ の係数を次数が高い方から順に並べる:

a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{N-2}	a_{N-1}	a_N

1.2 先の表の下に, $A(z)$ の係数を逆順に並べる.

a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{N-2}	a_{N-1}	a_N
a_N	a_{N-1}	a_{N-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0

2.1 $k = 0, \ldots, N-1$ に対し, $b_k = a_k - \dfrac{a_N}{a_0} a_{N-k}$ により b_k を計算し, この順に先の表の下に並べる. $k = N$ とすると $b_N = 0$ となることに注意.

a_0 a_N	a_1 a_{N-1}	a_2 a_{N-2}	$\cdots$ $\cdots$	a_{N-2} a_2	a_{N-1} a_1	a_N a_0
b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{N-2}	b_{N-1}	

2.2 先の表の下に, $(b_0, \ldots, b_{N-1})$ を逆順に並べる.

a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{N-2}	a_{N-1}	a_N
a_N	a_{N-1}	a_{N-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{N-2}	b_{N-1}	
b_{N-1}	b_{N-2}	b_{N-3}	$\cdots$	b_1	b_{00}	

K+1.1 K 段目の計算で $x_0^K, \ldots, x_{N-K+1}^K$ が得られているものとする. $k = 0, \ldots, N-K$ に対し, $x_k^{K+1} = x_k^K - \dfrac{x_{N-K+1}^K}{x_0^K} x_{N-K+1-k}^K$ により x_k^{K+1} を計算し, 先の表の下に並べる ($x_{N-K+1}^{K+1} = 0$ となることに注意).

K+1.2 先の表の下に $(x_0^{K+1}, \ldots, x_{N-K}^{K+1})$ を逆順に並べる.

以上のステップを繰り返すと, 1 ステップ (2 行組) の計算ごとに要素の数が 1 減る. 行の要素が 1 個だけになった時点で計算終了.

安定性判別 奇数行の最初の要素がすべて正なら $G(z)$ は安定.

- Jury 表を 2 行ペアで作成するのは手計算の都合．コンピュータでプログラムを作るときには, 奇数行のみを表示すればよい.
- 奇数行の最初の要素が零になった場合には, 様々な工夫が必要になる． Routh-Huruwitz の方法にも類似した欠点があり, この意味でこれらの方法は使い易いとは言い難い.
- Jury 表の例 (奇数行のみ) を次ページに示す.

$A(z) = (z+0.1)(z+0.3)(z+0.5)(z+0.7)$ (安定) の Jury 表

1.000000	1.600000	0.860000	0.176000	0.010500
0.999890	1.598152	0.850970	0.159200	0.000000
0.974542	1.462663	0.596516	0.000000	0.000000
0.609416	0.567369	0.000000	0.000000	0.000000
0.081193	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

$A(z) = (z+1)(z+2)(z+3)$ (不安定) の Jury 表

1.000000	6.000000	11.000000	6.000000
-35.000000	-60.000000	-25.000000	0.000000
-17.142857	-17.142857	0.000000	0.000000
-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

安定性判別と数値計算

- 高次の伝達関数の安定性を判定するには, コンピュータを使った数値的な計算が必要.
- 極を直接計算する場合も, Jury 表を使う場合も, 浮動小数点数を使う限りでは, 数値計算の誤差の影響を受ける.

- 有理数を直接取り扱える処理系では, 多項式の係数が有理数である場合には, Jury 表を使うことで, 数値計算の誤差を含まない安定性判別をおこなうことができる. この意味で, Jury 表は今日でもまったく無価値というわけではない.