ディジタル制御 第 $\mathbf{2}$ 回

離散時間システムの表現 (1)

差分方程式・

$\mathbf{z}$ 変換・

パルス伝達関数

差分方程式

- 以下のようなシステムを考える.

$$\overset{\text{入力}}{u(t)}\longrightarrow \boxed{\text{システム}} \longrightarrow \overset{\text{出力}}{y(t)}$$

- その入出力関係は次の p 階微分方程式で表現されているものとする: ($\square^{(k)}$ は k 階微分)

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k y^{(p-k)}(t) = \sum_{k=0}^{q} \beta_k u^{(q-k)}(t)$$

- $p, q \in \mathbb{N}$ で, 通常は $p \geq q$ である (因果的).
- このシステムの離散時間近似モデルを求める. サンプリング周期を T_s(一定) とする.
- $y'(nT_s)$ を差分 $\frac{y((n+1)T_s) - y(nT_s)}{T_s}$ で近似する.
- $y^{(k)}(nT_s)$ を差分 $\frac{y^{(k-1)}((n+1)T_s) - y^{(k-1)}(nT_s)}{T_s}$ で近似する. これを再帰的に適用すると, 最終的に微分を含まない近似式が得られる.

1 階システムでの計算例 ($\simeq$ は近似)

$y'(t) = ay(t) + bu(t)$
$\Rightarrow \frac{y((n+1)T_s) - y(nT_s)}{T_s} \simeq ay(nT_s) + bu(nT_s)$
$\Rightarrow y((n+1)T_s) \simeq (1 + aT_s)y(nT_s) + bT_s u(nT_s)$
$y(nT_s)$ などを略して $y(n)$ などと書くと…

$$y(n+1) \simeq (1 + aT_s)y(n) + bT_s u(n)$$

- 高階のシステムでも同様の計算をおこない, 係数を適切に書き換えると, 次のような形の(近似) 離散時間モデルが得られる:

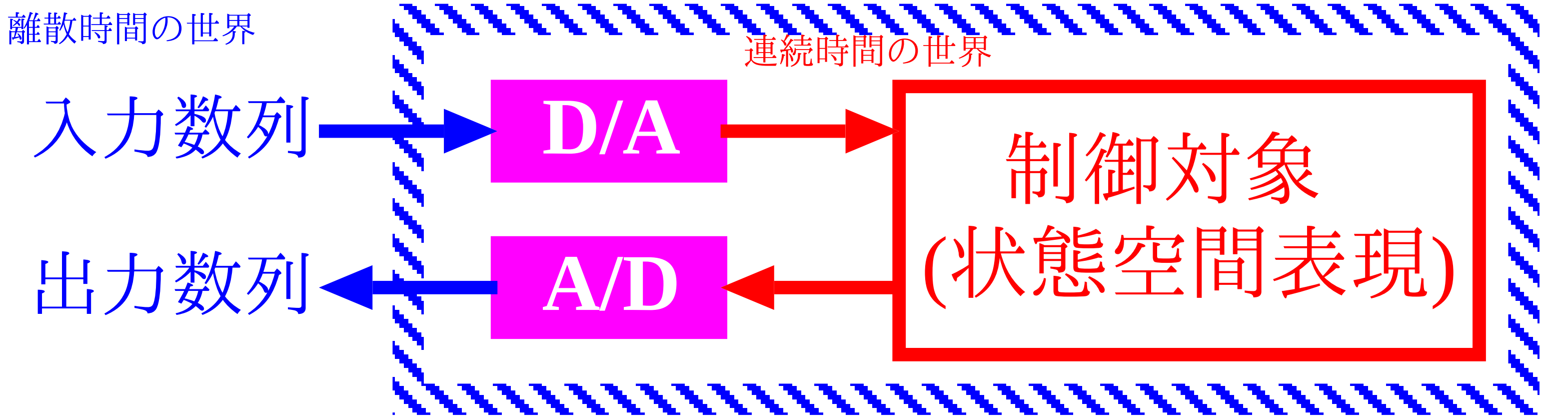
$$\sum_{k=0}^{p} a_k y(n+k) = \sum_{k=0}^{q} b_k u(n+k)$$

このような方程式を差分方程式と呼ぶ.

- 上記は微分の近似を含むのだが $\cdots$

- 高階の微分方程式を上記の方法で離散化すると, 離散化に伴う誤差の影響が大きいので注意.
- 離散化の方法の詳細については次回の講義で述べるが $\cdots$

- 以下の形で連続時間の状態空間表現を経由して離散化すると微分の近似を含まない入出力差分方程式を得ることもできる.



- 入出力微分方程式を連続時間伝達関数に直してから離散化する方法もあるが, より複雑 (次回).
- 制御対象がコンピュータシステムなどの場合に, 制御対象の数学モデルが始めから入出力差分方程式で与えられていることもある.

入出力差分方程式は, 必ずしも入出力微分方程式の近似というわけではない.

- $a_p \neq 0$ のとき, 先の式では, $y(n+p)$ が $y(n+p-1), \ldots, u(n+q), u(n+q-1), \ldots$ から求められる形になっているが, $y(n)$ が $y(n-1), \ldots, u(n), u(n-1), \ldots$ から求められるという形で書く流儀もある:

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{q} b_k u(n-k)$$

- 微分方程式の解を求めるときには, 大抵の微分方程式は解析的な手段では解けないので, 差分方程式による近似を要することが一般的.
- 差分方程式を満たす数列 $(y(n))_{n\in\mathbb{N}}$ を求めることを, 差分方程式を解くという ($n \in \mathbb{Z}$ とすることもある). 微分方程式と同様に, 所与の初期条件を満たす解を求める初期値問題や, 一般解を求める問題などがある.

z 変換

- 整数の時刻で定義された無限長の信号 $x = (x(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ を考える．この信号の両側 z 変換とは, 次式によって定まる形式的冪級数である:

$$\mathcal{Z}[x] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) z^{-n}.$$

- 制御工学では, 時不変のシステムを対象とし, システムはある初期時刻 (零としてよい) に動作を開始すると考えることが多い．この場合, 時間軸は整数 $\mathbb{Z}$ ではなく自然数 $\mathbb{N}$ となる (この講義では $\mathbb{N}$ に零を含める)．このような信号の z 変換は次式で与えられる (これを片側 z 変換と呼ぶ).

$$\mathcal{Z}[x] = \sum_{n \in \mathbb{N}} x(n) z^{-n}.$$

- 片側 z 変換は, $n < 0$ のとき $x(n) = 0$ となる信号を両側 z 変換しているものと解釈することもできる．このような信号を因果的な信号と呼ぶことがある．
- その出力が未来の入力に依存しないシステムを因果的なシステムと呼ぶ．因果的な時不変システムの性質を調べるときには両側 z 変換は不要で, 片側 z 変換のみを考えればよい．

- z 変換の用途は, 線形時不変入出力差分方程式の取り扱いやすい別表現を与え, かつその求解を容易にするという意味で有用.
- 制御工学やリアルタイム信号処理では片側 z 変換を用いることが多いが, 非リアルタイム信号処理では両側 z 変換を用いることもある.
- 両側 z 変換と片側 z 変換は, いずれも z 変換と略して呼ばれることが多い.

- z 変換がこの形で提案されたのは 1952 年であるが, z 変換とは, 信号が解析関数に対応しているものと解釈し, 信号の各時刻における値を解析関数のローラン展開の係数と解釈しているに過ぎない. ローラン展開は Pierre Alphonse Laurent (1813-1854) による.

https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/laurent-pierre-alphonse
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Laurent_Pierre.html

- 信号を z 変換する作用素を $\mathcal{Z}[\cdot]$ と書く.
- 以下しばらく, $X = \mathcal{Z}[x]$ のように, z 変換前の信号は英文字の小文字で書き, z 変換後の信号は対応する大文字で表す.

- 片側 z 変換, 両側 z 変換とも, 複素関数論で学んだローラン級数の形になっている. したがって, これらが絶対収束するか否かが問題となる. 絶対収束しない場合には, 逆 z 変換 (後述) によって信号の値を復元することはできない.
- まず両側 z 変換について考える.

- 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$ に着目する．$1/z = w$ と変数変換すると，この無限級数は $\sum_{n=0}^{\infty} x(n) w^n$ のように書き換えられる．後者の収束半径は (複素関数論の講義を思い出すと)
$r_1 = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|}}$ である．

- $|w| < r_1$ のとき先の無限級数は絶対収束する. したがって, $w = 1/z$ より, $|z| > 1/r_1$ のとき, もとの無限級数は絶対収束する. すなわち,

$$R_1 = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|}$$

とすると, $|z| > R_1$ で無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$ は絶対収束する.

- 次に, 無限級数 $\sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n}$ に着目し, これが絶対収束すると仮定した上で収束半径を求める. $-n = k$ とおくと, 収束円の内部では和の順番を入れ換えられるから, 先の無限級数は $\sum_{n=0}^{\infty} x(-n)z^{n}$ となる. この収束半径は $R_2 = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(-n)|}}$ となる. $z < R_2$ であれば, 和の順番の交換が可能だから, 先に述べた操作は正当化される.

- $R_1 < |z| < R_2$ であれば, 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$ において和の順番を入れ換えても結果が変わることはないから, 上述の手順はすべて正当化される. 結果として, 以下の条件が満たす範囲において, 信号 x の z 変換は絶対収束し, X はこの領域 (D_x と書き, x の収束領域と呼ぶ) で正則な関数を定める.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|} < |z| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(-n)|}}.$$

- $\displaystyle \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|} > \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(-n)|}}$ となっている場合には, $D_x = \emptyset$, すなわち z 変換は収束しない．このため, 両側 z 変換は必ずしも取り扱いやすくない.

- 片側 z 変換では, 先の議論で $n < 0$ の部分を考慮する必要はないから,

$$D_x = \{z \in \mathbb{C} : \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|} < |z|\}$$

とすると, 絶対収束の十分条件は, $z \in D_x$ である. この場合も, D_x を x の収束領域と呼ぶ.

- 理論的には $D_x = \{\infty\}$ ということもあり得るが (空集合にはならない), 応用上は稀.

- 因果的な信号 x は, ある $r \geq 0$ および $C \geq 0$ に対して $|x(n)| \leq Cr^n$ となるとき, 指数関数によって上から押さえられるという (便宜上 $0^0 = 1$ とおく).
- 信号 x が指数関数によって上から押さえられるとき, 定義にしたがって計算すると, D_x は $\{z : |z| > r\} \neq \emptyset$ となる.

- 因果的な線形システムの解は指数関数によって上から押さえられるから (次回), 線形システムを対象とする限りにおいて, 片側 z 変換を用い, z 変換された領域で信号の加工や解析をおこなうことは, 複素平面から原点を中心とする十分大きい円を除いた領域では正当ということがいえる.
- 両側 z 変換にはこのような良い性質はない.

逆 z 変換

- $D_x \neq \emptyset$ のとき, $X(z) = \mathcal{Z}[x]$ は D_x における正則関数で, x を z 変換する式は $X(z)$ のローラン展開だから, $X(z)$ を逆 z 変換するには, ローラン展開の係数を求めればよい.

D_x の定義を思い出すこと:

$$D_x = \left\{ z : \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|} < |z| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(-n)|}} \right\}$$

- 複素関数論で学んだように, ローラン級数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ が原点を中心とする円環上の領域で収束するとき, C を原点を中心とするこの領域内の円とすると, c_n は複素積分

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta_{n+1}} d\zeta$$

によって求められる (j は虚数単位).

(円環領域の中心が原点なので, 展開の中心を $a \in \mathbb{C}$ としたローラン展開の一般形より式が簡単になっている.)

- 解析関数を逆 z 変換する作用素をを $\mathcal{Z}^{-1}[\cdot]$ と書くことにすると, C を原点を中心とする x の収束領域内の円に取ったとき, $x(n) = \left(\mathcal{Z}^{-1}[X]\right)(n)$ は次式によって与えられる.

$$x(n) = \left(\mathcal{Z}^{-1}[X]\right)(n) = \frac{1}{2\pi j}\int_C X(\zeta)\zeta^{n-1}d\zeta.$$

- 複素積分における円 C を収束領域の内部に取らなければならないことに注意．z 変換は $\mathcal{Z}[x]$ を加工した後で逆 z 変換して「時間領域」(工学的な解釈) の信号を復元できるから意味がある (実際に複素積分によって逆変換をおこなうことは稀ではあるが)．収束領域が空集合の場合には逆変換ができないから，形式的に z 変換を定義しても役に立つとは言い難い．

- 多くの場合, 信号を z 変換した結果は z の有理式となり, その逆 z 変換は有理式に代数的な演算を施した結果と既知の関数の z 変換を対応させることで求められる (大抵は指数関数と時間シフトの組み合わせ (次回以降)).

片側 z 変換の例

- $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とし, 次のような信号 (指数関数) を考える: $x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$. z 変換の収束領域は $D_x = \{z : |z| > |a|\}$ で, この領域で
$$X(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

- 単位ステップ u_s ($n < 0$ で $u_s(n) = 0$, $n \geq 0$ で $u_s(n) = 1$ となる信号) は, 指数関数において $a = 1$ とした場合だから,

$$U_s(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

z 変換の性質

- 以下では x, x_1, x_2, w を信号とし, これらを z 変換したものを X, X_1, X_2, W, これらの収束領域を D_x, D_{x_1}, D_{x_2}, D_w と書く.
- τ_m をシフト演算子とする: $(\tau_m x)(n) = x(n-m)$.

z 変換の線形性

- $D_{x_1} \cap D_{x_2} \neq \emptyset$ のとき, 任意の $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ に対し, $a_1 x_1 + x_2 x_2$ が定義され, $z \in D_{x_1} \cap D_{x_2} \neq \emptyset$ に対し

$$\mathcal{Z}[a_1 x_1 + a_2 x_2](z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$$

となる.

これは無限級数の性質を言い換えているだけなので証明するまでもない.

z 変換と (非因果的な) 信号の時間シフト

- $m \in \mathbb{Z}$ に対し, D_x において $(\mathcal{Z}[\tau_m x])(z) = z^{-m} X(z)$.

証明: $(\mathcal{Z}[\tau_m x])(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n-m) z^{-n}$ だが, $n-m=k$ と変数変換すると, $-n=-m-k$ で, D_x において $(\mathcal{Z}[\tau_m x])(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k) z^{-m-k} = z^{-m} X(z)$.

- この結果を踏まえ, 演算子 τ_1 自体を z^{-1} と書くことも多い.

(片側)z 変換と因果的な信号の時間シフト

- 信号 x は因果的とする ($n < 0$ のとき $x(n) = 0$).
- $m \geq 0$ のときは, 非因果的な信号と同じ理由で, $\mathcal{Z}[\tau_m x] = z^{-m}\mathcal{Z}[x]$ となる.
- $m < 0$ についても同様の式を得たいのだが…

$$z\mathcal{Z}[x] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-(n-1)} = \sum_{n=-1}^{\infty} x(n+1) z^{-n}$$

- $z\mathcal{Z}[x]$ は時刻 -1 で値 $x(0)$ を取る信号になり, 因果的でない.
- この不都合を解消するために, 邪魔な $x(0)$ を消したい.

$$z\left(\mathcal{Z}[x] - x(0)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) z^{-(n-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+1) z^{-n}$$

これは因果的な信号になっている.

- u_s を単位ステップとする.
- 因果的な信号 x に対し, $\tau'_m x = \begin{cases} \tau_m x & m \geq 0 \\ (\tau_m x) u_s & m < 0 \end{cases}$ と定義する. $m < 0$ のときには, 片側 z 変換できる信号は, $\tau_m x$ ではなく $\tau'_m x = (\tau_m x) u_s$ である.
- 以上の準備のもとで, 先の式より,

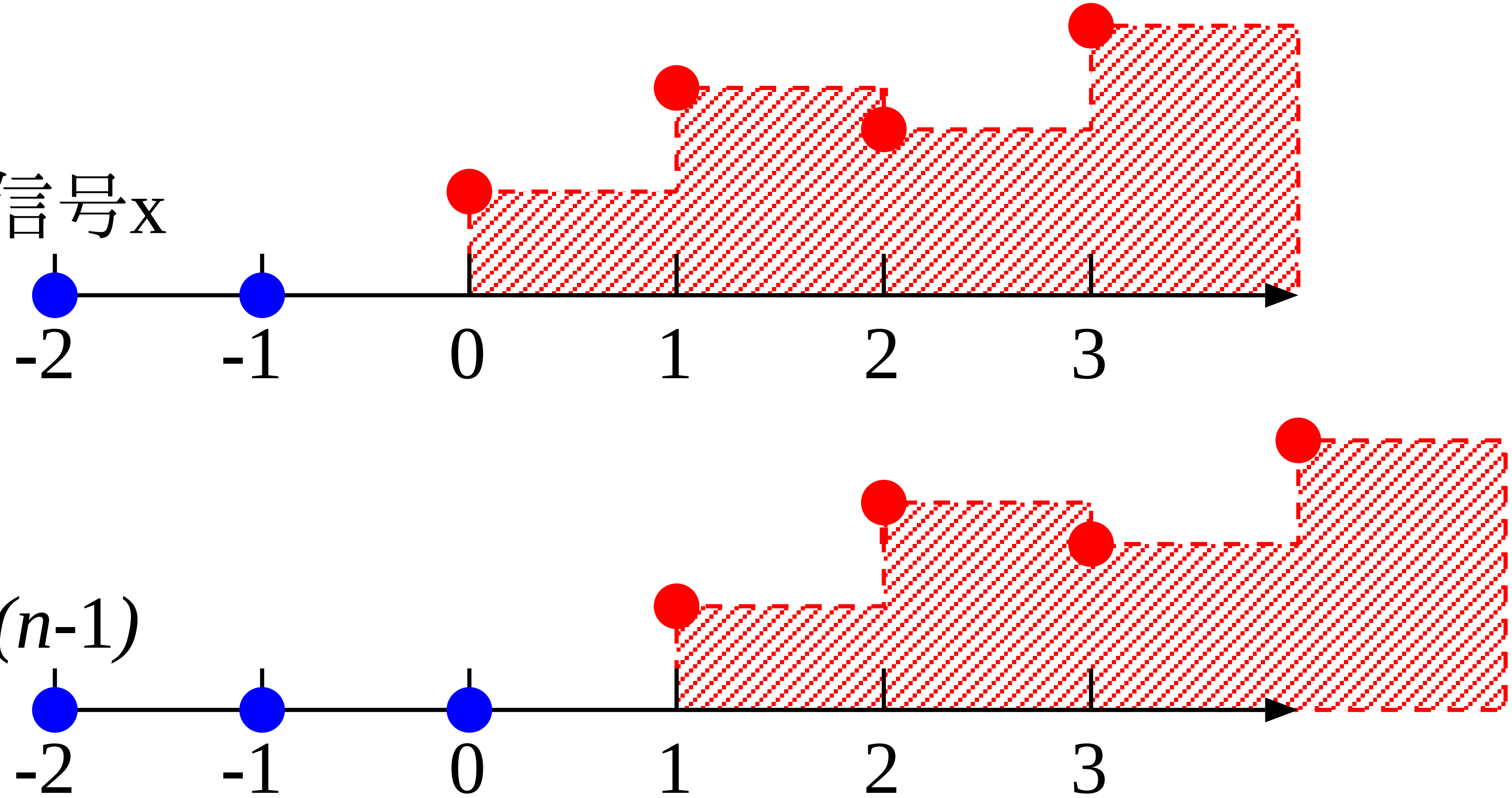
$$z\left(\mathcal{Z}[x] - x(0)\right) = \mathcal{Z}[\tau'_{-1} x].$$

- $m \geq 2$ についても同様で, $\tau'_m x$ は, $\tau_m x$ から負の時刻側にはみ出した系列 $x(0), x(1), \ldots, x(m-1)$ を削除することによって得られるから,

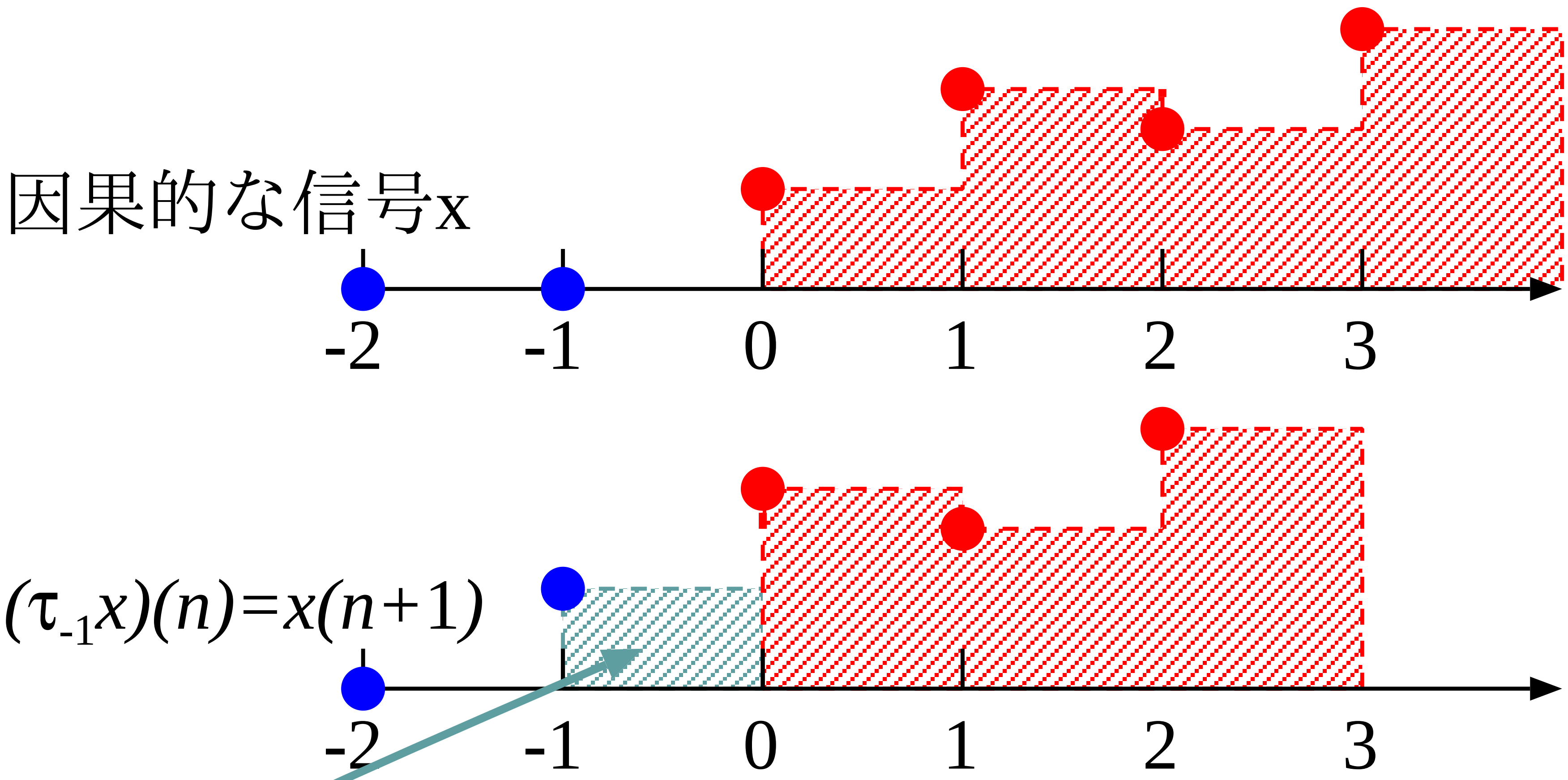
$$z^m \left(\mathcal{Z}[x] - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \right) = \mathcal{Z}[\tau'_{-m} x].$$

因果的な信号x

$(\tau_1 x)(n) = x(n-1)$



mが正なら$\tau_m x$は因果的な信号になる



mが負なら$\tau_m x$は因果的な信号にならない

信号に単位ステップを乗ずることでここを捨てる

- システムを過渡応答を無視するときには (応用上はこのようにすることが多い), 前ページ左辺の $x(0), \ldots, x(m-1)$ をすべて零とする. この場合には,

$$z^m \mathcal{Z}[x] = \mathcal{Z}[\tau'_{-m} x].$$

となる.

指数関数との積

- $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し, 信号 y を $y(n) = z_0^n x(n)$ によって定義すると, 収束領域 (後で求める) では $(\mathcal{Z}(y))\,(z) = X(z/z_0)$.

証明: 収束領域では $\mathcal{Z}[y] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z_0^n x(n) z^{-n} = X(z/z_0)$. x の収束領域を D_x とすると, y の収束領域は $D_y = |z_0| D_x$ であることが上極限を使った収束領域の計算法を適用することで確認できる.

畳み込み

- 記号 $*$ は信号の畳み込みを表すものとする.
  $D_{x_1} \cap D_{\cap x_2} \neq \emptyset$ と仮定する. このとき,

$$\mathcal{Z}[x_1 * x_2] = X_1 X_2.$$

証明: $D_{x_1} \cap D_{x_2}$ において X_1 と X_2 はともに正則関数だから, $X_1 X_2$ は正則関数である. $(X_1 X_2)(z)$ はこの領域で絶対収束するから, 和の順番を入れ換えることができ, $(X_1 X_2)(z) = \sum x_1(m) x_2(n-m) z^n$ とできる. z^{-n} の係数が $(x_1 * x_2)(n)$ と一致することと, ローラン展開はこの領域で一意的であることから, $\mathcal{Z}[x_1 * x_2] = X_1 X_2$.

X の微分

- y を $y(n) = nx(n)$ によって定まる信号とすると, D_x において $Y(z) = -z\dfrac{dX(z)}{dz}$.

証明: D_x において X は正則だから微分可能で, かつこの領域で項別微分できる. また, 関数 $z \mapsto zdX(z)/dz$ も D_x で正則である. よって, D_x において $-zdX(z)/dz = -z\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-n)x(n)z^{-n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} nx(n)z^{-n}$. ローラン展開はこの領域で一意的だから, D_x において $Y(z) = -z\dfrac{dX(z)}{dz}$.

複素共役

- D_x において $(\mathcal{Z}[\overline{x}])\,(z) = \overline{X}(\overline{z})$.

証明: 収束半径を計算する際には $x(n)$ の絶対値しか使わなかったから, $\overline{x}$ の z 変換の収束領域は x のそれと同一で D_x.
D_x において $(\mathcal{Z}[\overline{x}])\,(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{x}(n) z^{-n} = \overline{X}(\overline{z})$.

因果的な信号の初期値

- x が因果的で $D_x \neq \{\infty\}$ のとき, $\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$.

証明: $D_x \neq \{\infty\}$ なら D_x はある原点を含む円の外部だから, $z \to \infty$ としてよい. z を固定すると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $K > 0$ が取れ, $\left| X(z) - \sum_{n=0}^{K-1} x(n) z^{-n} \right| \leq |\sum_{n=K}^{\infty} x(n) z^{-n}| < \epsilon$ とできるが, $K > 0$ を固定すると, $\sum_{n=K}^{\infty} |x(n) z^{-n}|$ は $|z|$ に対し単調減少するから, このまま $z \to \infty$ とすると $|\lim_{z\to 0} X(z) - x(0)| < \varepsilon$. ε は任意だったから, $\lim_{z\to 0} X(z) - x(0)$.

因果的な信号の最終値

- x が因果的で, $n \to \infty$ としたとき有限の極限 $x(\infty)$ に収束すると仮定する. このとき,

$$x(\infty) = \lim_{z \to 1}(z-1)X(z)$$

証明 (1/2): u_s を単位ステップとし, $w = x - x(\infty)u_s$ とおく. また, $|z| > 1$ とする. x および w はそれぞれ $x(\infty)$ および零に収束するから, これらの z 変換は複素単位円の外部で意味を持つ. $X(z) = \mathcal{Z}[x]$ および $W(z) = \mathcal{Z}[w]$ に対し, $W(z) = X(z) - x(\infty)\frac{z}{z-1}$ であり, よって

$$(z-1)W(z) = (z-1)X(z) - x(\infty)z$$

である. $\varepsilon > 0$ をひとつ固定する. w は零に収束するから, $\exists N, \forall n \geq N$, $|w(n)| < \varepsilon$ である. このとき, $W(z) - \sum_{n=0}^{N-1} w(n)z^{-n} = \Theta(z)$ とおくと, $\Theta(z) = \sum_{n=N}^{\infty} w(n)z^{-n}$ で, よって

$$|\Theta(z)| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |w(n)||z|^{-n} \leq \varepsilon \sum_{n=N}^{\infty} |z|^{-n} \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} |z|^{-n} \leq \varepsilon \frac{1}{1-|z|}$$

である.

証明 (2/2):　したがって,

$$|(z-1)X(z)-x(\infty)z| \le |z-1|\left|\sum_{n=0}^{N-1} w(n)z^{-n}\right| + \varepsilon\frac{|z-1|}{1-|z|}$$

である．　上式で $z \to 1$ とすると，右辺は ε に近付く．　よって,
$\limsup_{z\to 1}|(z-1)X(z)-x(\infty)z| \le \varepsilon$ である．ε は任意だったから,
$\limsup_{z\to 1}|(z-1)X(z)-x(\infty)z| = 0$ で, よって

$$\lim_{z\to 1}((z-1)X(z)-x(\infty)z) = \left(\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)\right) - x(\infty) = 0$$

である.

証明の典拠: 杉山, ラプラス変換入門, 実教出版, 1977.

パルス伝達関数

- 入力信号を u, 出力信号を y とし, システムの入出力関係が信号 h との畳み込みによって与えられているものとする. u, y, h は因果的であると仮定する.

- システムのパルス伝達関数 (あるいは伝達関数) とは, 入力信号と出力信号を z 変換したものの比である. z 変換が収束することは暗黙のうちに仮定される.
- $h * u$ の収束領域において, $y = h * u$ という入出力関係を持つシステムの伝達関数は, $H(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)}$ によって与えられる. ただし, $H(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} h(n)z^{-n}$.

- 今後, いちいち収束領域について記述することは省略する.
- システムの入出力関係がインパルス応答との畳み込みによって与えられているときには, その伝達関数を上記のようにして直ちに求めることができる.

入出力差分方程式とパルス伝達関数

- 以下の入出力差分方程式を $n \geq 0$ の範囲で解くことを考える ($y(0)$ は任意).
  $y(n+1) = -ay(n) + bu(n).$
- (因果的な) 時間進み作用素 τ'_{-1} を用い, この差分方程式を以下のように書き換える (すべての n でこの等式が成り立つという意味).
  $\tau'_{-1} y = -ay + bu.$

- 両辺が z 変換可能であると仮定し，$z\left(\mathcal{Z}[y]-y(0)\right)=\mathcal{Z}[\tau'_{-1}y]$ を用いると，$zY(z)-zy(0)=-\alpha Y(z)+\beta U(z)$ となる．これを書き直して $\cdots$

$$Y(z)=\underbrace{\frac{\beta}{z+\alpha}U(z)}_{\text{伝達関数}}+\underbrace{\frac{z}{z+\alpha}y(0)}_{\text{過渡応答}}.$$

- 次に, 話を一般化して, 以下の入出力差分方程式を考える $(p \geq q)$.

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k y(n+k) = \sum_{k=0}^{q} \beta_k u(n+k)$$

- 先と同様に, この差分方程式を以下のように解釈する.

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k \tau'_{-k} y = \sum_{k=0}^{q} \beta_k \tau'_{-k} u$$

- 両辺を z 変換すると $\cdots$

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k z^k Y(z) + (\text{初期値依存項 A})$$

$$= \sum_{k=0}^{q} \beta_k z^k U(z) + (\text{初期値依存項 B})$$

(初期値依存項 A) は $y(0), \ldots, y(p-1)$ から定まる z の p 次の多項式で, (初期値依存項 B) は $u(0), \ldots, u(q-1)$ から定まる z の q 次の多項式である.

- パルス伝達関数を求めるときには, 初期値に依存した項 (過渡応答) を無視するから ⋯

$$Y(z) = \underbrace{\boxed{\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \beta_k z^k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \alpha_k z^k}}}_{\text{伝達関数}} U(Z)$$

- 入出力差分方程式から対応する伝達関数を求めるには, 形式的に $y(n+k)$ を $z^kY(z)$, $u(n+k)$ を $z^kU(z)$ で置き換えてから, $\dfrac{Y(z)}{U(z)}$ を計算すればよい.
- 過渡応答を問題にするときには初期値依存項を無視できないことに注意.

- $a_p \neq 0$ のとき, パルス伝達関数の分子と分母を α_p で割っても, パルス伝達関数は不変. そこで, 通常は, 分母の z に関する最高次の冪の係数を 1 とし, $a_k = \alpha_k/\alpha_p$, $b_k = \beta_k/a_p$ として, 伝達関数を

$$\frac{\sum_{k=0}^{q} \beta_k z^k}{z^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k z^k}$$

のように書く.

- 分母と分子にさらに z^{-p} を乗じ,

$$\frac{\sum_{k=0}^{q} \beta_k z^{k-p}}{1 + \sum_{k=0}^{p-1} a_k z^{k-p}}$$

のように書く流儀もある.

- z 変換を使って差分方程式を解く方法については次回以降に余裕があれば述べる.