

電子情報通信実験 テーマ 11

デジタルフィルタ講義

デジタル信号処理とは何か

- 離散時間信号処理 (音声)
- 離散 (空間) 信号処理 (画像)
- 独立変数が離散的な値を取る
- 信号値は離散的な場合と連続的な場合がある
- 多くの場合デジタルプロセッサが前提

(対比) アナログ信号処理

- 独立変数, 従属変数とも連続的な値
- 数学的枠組と解釈してもよいが...
- アナログ素子を前提とした信号処理を指す場合もある

- 我々が住む世界はアナログ
- コンピュータの処理はデジタル
- 信号処理がコンピュータシステムの内部で閉じているときにはデジタルな演算のみで処理が完結するが…
- アナログの世界と情報をやり取りするときには、「アナログからデジタルへ」「デジタルからアナログへ」の変換が必要になる

- アナログの世界の信号を…
 - ▷ アナログ信号処理 ⇒ 変換は不要
 - ▷ デジタル信号処理 ⇒ 変換が必要
- デジタル信号処理は変換という工程を含む分アナログ信号処理より複雑だが…
- 実用上はデジタル信号処理の方がよく使われる

なぜデジタルで処理するか

- デジタル処理は柔軟:
 - ▷ コンピュータのプログラムで書けることは何でもできる
 - ▷ システムの拡張が容易

- デジタル処理は高品質：
 - ▷ 想定外の雑音が混入するリスクが少ない
 - ▷ 長期記憶が可能で、経年変化や環境の変動の影響を受けにくい

- デジタル処理はLSI化および大量生産によって小型化, 低コスト化が可能
- 中心部分はコンピュータのプログラムなので, 仕様変更柔軟に対応可能で, 相対的に開発者の熟練を要さず, 製品のばらつきが少ない

デジタル処理の欠点は？

- 処理内容が極めて簡単なときには回路規模的にアナログ処理と比べて不利
- 処理速度に限界がある (CPU, I/O 等の能力)
- 量子化雑音, 演算雑音の影響がある
- クロックの発する高周波雑音が周辺回路に影響することがある

離散時間信号・デジタル信号

- 音声のような時間とともに変わる信号を考える (アナログ信号)
- コンピュータで処理するために, 飛び飛びの時刻 (簡単には一定周期) で, 信号の標本を取得する (標本化; サンプルング (sampling)). 標本化された信号を離散時間信号 (あるいはサンプル値信号) という.

- 続いて、標本化された信号の値 (連続値) を離散的な値 (とり得る値が有限個) に変換する (量子化). 標本化および量子化された信号をデジタル信号と呼ぶ.
- 量子化とは、有限個のビットパターンの中で、その示す数値が量子化したい信号の値に最も近いものを選ぶ操作であり、近似誤差が伴う (量子化誤差).

- この実験では、デジタル信号とは、**標本化および量子化された信号**であると定義する。
- 実験で用いるサンプル音声は、標本化および量子化されているので、デジタル信号である。

- 最も単純には、標本化は一定時間ごとにおこなわれる (この講義ではこのような状況のみを考える); この周期を**標本化周期**あるいは**サンプリング周期**という.
- 標本化周期の逆数を**標本化周波数**あるいは**サンプリング周波数**という.
- 標本化周波数に 2π を乗じたものを**標本化角周波数**あるいは**サンプリング角周波数**という.

- サンプルング周期を T_s とすると、離散時間信号あるいはデジタル信号の値は T_s の整数倍 ($0, T_s, 2T_s, 3T_s, \dots$) の時刻のみで定義されるが …
- サンプルング周期 T_s を毎回書くのは冗長なので、これを略して、時間軸を整数 ($0, 1, 2, 3, \dots$) と書き直すことが多い

- $x(t)$ を標本化すると $(x(0), x(T_s), x(2T_s), \dots)$ となるが, T_s を略して,

$$(x(0), x(1), x(2), \dots)$$

あるいは

$$(x[0], x[1], x[2], \dots)$$

と書くことが一般的 (() を使うか [] を使うかは流儀による).

- 信号 $(x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ を考える.
- \mathbb{Z} は整数全体の集合
- $(x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ は n を添字とする数列をあらわす
- $\{x[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ と書くこともある
- 数学的には, 信号とは数列のこと.

基本信号

- **単位インパルス** $(\delta[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ は, $n = 0$ で 1, $n \neq 0$ で 0 となる信号この信号はデジタル信号処理において, Dirac のデルタ関数と類似した役割を果たす.
- **単位ステップ** $(u[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ は, $n < 0$ で 0, $n \geq 0$ で 1 という値を取る信号. $u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$ という関係が成り立つ.

畳み込み

- 信号 u と信号 v に対し, $u * v$ という新しい信号を次式によって定義する.

$$(u * v)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]v[n - m].$$

これを u と v の畳み込み (たたみこみ) あるいは, 重畳, **convolution** と呼ぶ. この演算を導入する理由は次ページで述べる.

インパルス応答

- 単位インパルス δ に対するシステムの応答 $L[\delta]$ をインパルス応答という.
- 線形時不変システムの入力 x に対する応答は、**入力 x と インパルス応答の 畳み込み** で与えられる. このため、畳み込みは理論・応用の双方で重要.

畳み込み積分との比較

- 連続時間信号 $u(t)$ と $v(t)$ に対し, $u(t)$ と $v(t)$ の畳み込み積分は

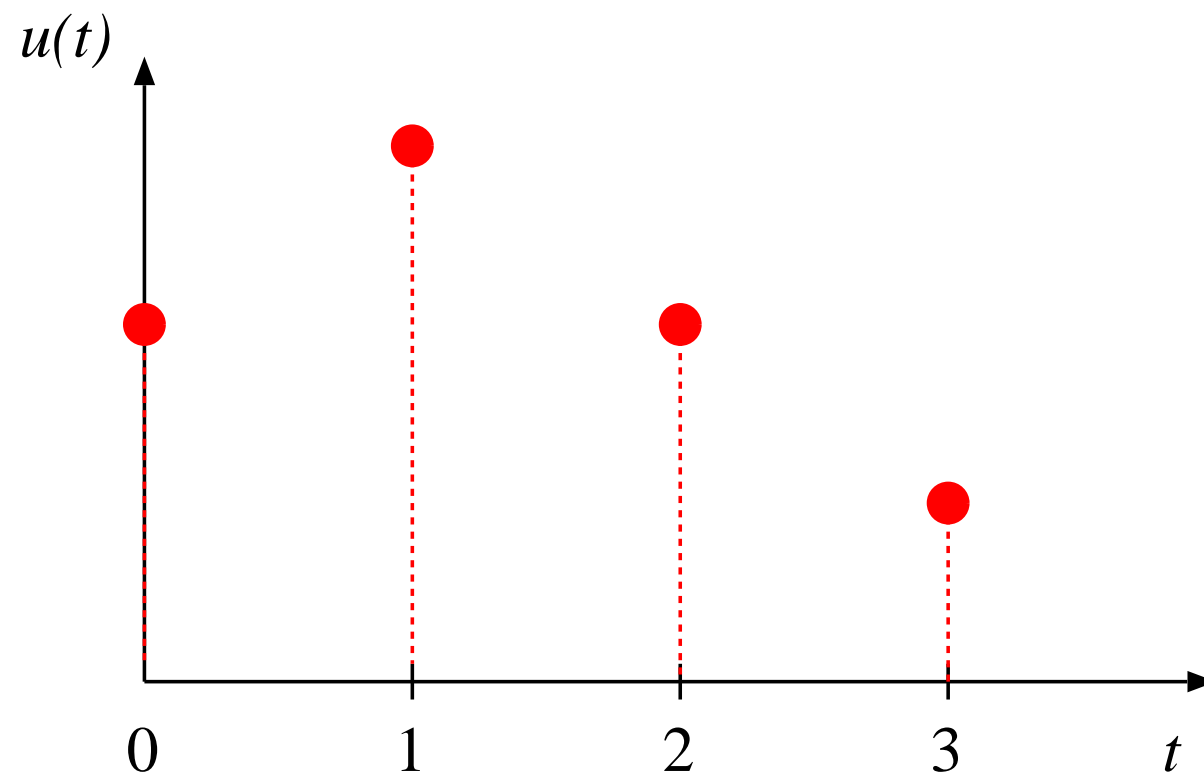
$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t-s)v(s)ds$$

によって定義されていた.

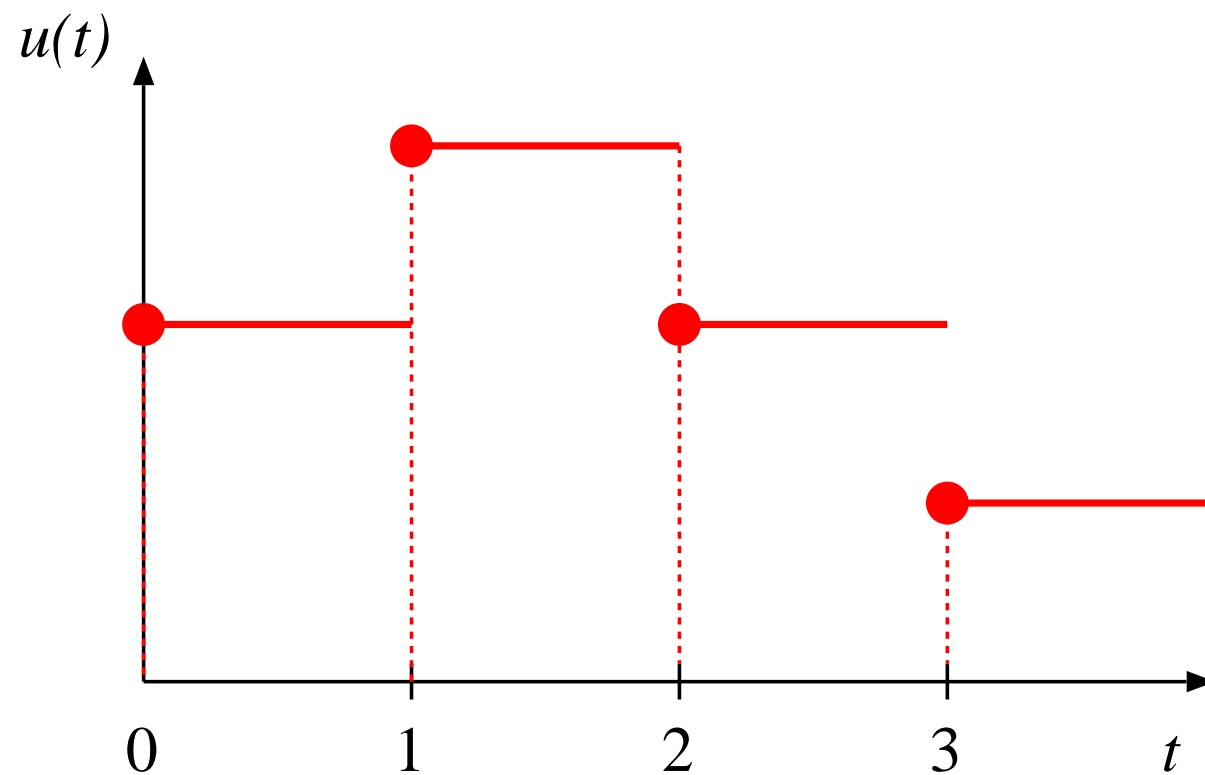
- 離散時間の畳み込み (畳み込み和) は連続時間の畳み込み積分と本質的に同じものである.

- これは、言い換えると、連続時間信号処理における時間に関する積分と離散時間信号処理における時間に関する和が対応するということを意味している。
- これを確認する。

- 時刻 $0, 1, 2, 3, \dots$ で標本化された信号を考える.
- サンプル点のあいだの信号値に関する情報はないものとする.



- $\int_0^4 u(s)ds$ を標本値から近似計算することを考える.
- サンプル点間の補間には色々な方法が考えられるが、もっとも簡単なものは、次のサンプルが得られるまで最も最近の値を保持する**零次ホールド**と呼ばれるものである.



零次ホールドによる値の保持

- 零次ホールドによって補間された信号を $\hat{u}(t)$ とし, $\hat{u}(t)$ を時刻 0 から 4 まで積分すると,

$$\begin{aligned}\int_0^4 u(s) ds &= u(0) + u(1) + u(2) + u(3) \\ &= \sum_{n=0}^3 u(n)\end{aligned}$$

となり, 確かに積分が和に変わっている.

フーリエ級数とフーリエ変換

- 工学では, 周期的な信号がよく用いられる.
- 周期的な信号の解析および処理には, フーリエ級数展開が有用.

- 周期 2π の信号のフーリエ級数展開は、典型的には、次のように定義される。

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt$$

- 先の式において, 記号「 \sim 」は気持としては等号にしたいところなのであるが, この部分が等号になるためには, $f(t)$ に色々条件を付けなければならない (色々条件を付ければ等号になる).

- 上記は周期が 2π の場合なのであるが...
- 周期を T に一般化することもできる.
- 周期 T の信号のフーリエ級数展開は, 典型的には, 次のように定義される.

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2\pi n}{T} t$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \frac{2\pi n}{T} t$$

- 周期信号を取り扱う場合, 文献によって周期を T とするものと $2T$ とするものがあるので注意.
- 工学系では周期を T とすることが一般的.

- オイラーの公式

$$e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = \cos \frac{2\pi n}{T}t + j \sin \frac{2\pi n}{T}t$$

を用いると、周期 T のフーリエ級数展開を、よりコンパクトに表現することができる。

- j は虚数単位. 工学系では、電流の記号との混乱を避けるため、虚数単位の記号として j がよく用いられる.

- 天下り式であるが, $n \in \mathbb{Z}$ に対し (n が負の値をとり得ることに注意),

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j \frac{2\pi n}{T} t} dt$$

と定義する.

- 定義から, $a_0 = C_0$ である.
- 一方, $n \geq 1$ に対し,

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

だから,

$$a_n = C_n + C_{-n}, \quad b_n = j(C_n - C_{-n})$$

である.

- よって,

$$\begin{aligned} & a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t \\ &= (C_n + C_{-n}) \frac{e^{j\frac{2\pi n}{T}t} + e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}}{2} \\ &\quad + j(C_n - C_{-n}) \frac{e^{j\frac{2\pi n}{T}t} - e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}}{2j} \\ &= C_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} + C_{-n} e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}. \end{aligned}$$

- まとめると,

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt$$

- これを複素フーリエ級数と呼ぶことがある.

- 正弦関数および余弦関数を用いたフーリエ級数 (英語では Trigonometric Fourier Series, Fourier Trigonometric Series, Trigonometric Series などと呼ばれるが, 対応する日本語は定着していないようである) と比較すると, 複素フーリエ級数の方が記憶しやすい形になる.

- フーリエ級数展開は、周期 T の周期関数に対して適用されるものであるが…
- 周期 T を無限大にした極限を取ることにより、非周期的な信号を取り扱うことができる (収束に関しては色々と条件が必要ではあるが).

- 信号 g のフーリエ変換は、以下のように定義される。

$$\mathcal{F}[g](\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\Omega t} dt$$

- 複素フーリエ級数ではフーリエ係数 C_n は $n \in \mathbb{Z}$ に対してのみ定義されていたが、フーリエ変換では、 $\mathcal{F}[g](\Omega)$ は $\Omega \in \mathbb{R}$ に対して定義された関数になる。

- 信号 $G(\Omega)$ の逆フーリエ変換は、以下のように定義される。

$$\mathcal{F}^{-1}[G](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

- **性質の良い関数** (色々条件が必要) をフーリエ変換してから逆フーリエ変換すると, もとの関数に戻ることが証明できる (詳細は工業数学 III の範囲なので略)
- フーリエ変換の定義にはバリエーションがある (本を見るたびに書いてあることが違うということも)

- 複素フーリエ級数展開とフーリエ変換を対比して考える.

- フーリエ係数 $\{C_n : n \in \mathbb{Z}\}$ の書き方を少し変えて, $\{C(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ とすると, フーリエ係数は n を独立変数とする関数と解釈できることがわかる.
- この解釈のもとで, 区間 $[-T/2, T/2]$ で定義された関数 $f(t)$ と $n \in \mathbb{Z}$ で定義された関数 $C(n)$ が対応する.

- たとえば,

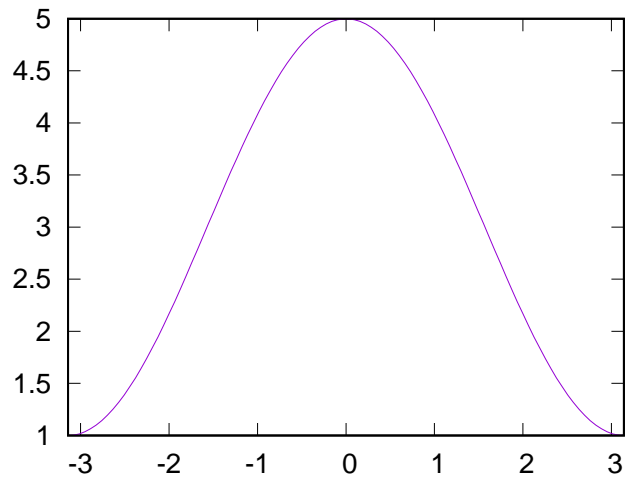
$$f(t) = 3 + 2 \cos t$$

は周期 2π の関数で, 対応する複素フーリエ係数は

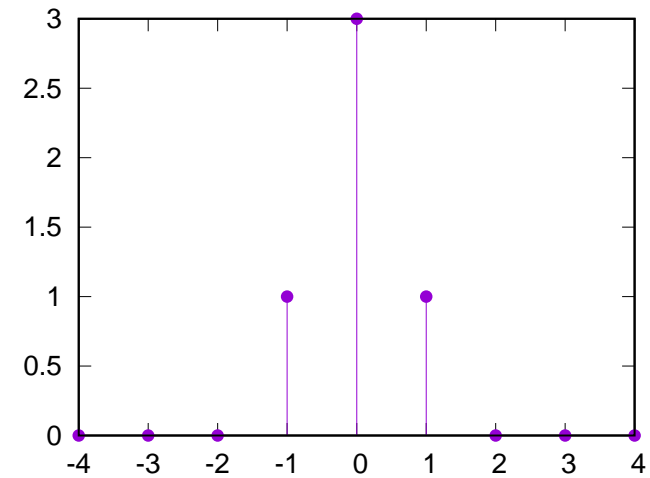
$$C(0) = 3, C(1) = 1, C(-1) = 1$$

であり, $|k| \geq 2$ に対して $C(k) = 0$ である.

関数とフーリエ係数の対応関係は以下の通り.



関数



フーリエ係数

- 一方, たとえば,

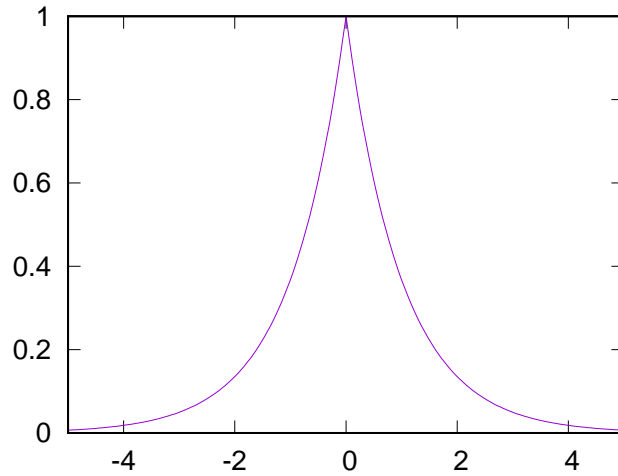
$$f(t) = e^{-|t|}$$

をフーリエ変換すると,

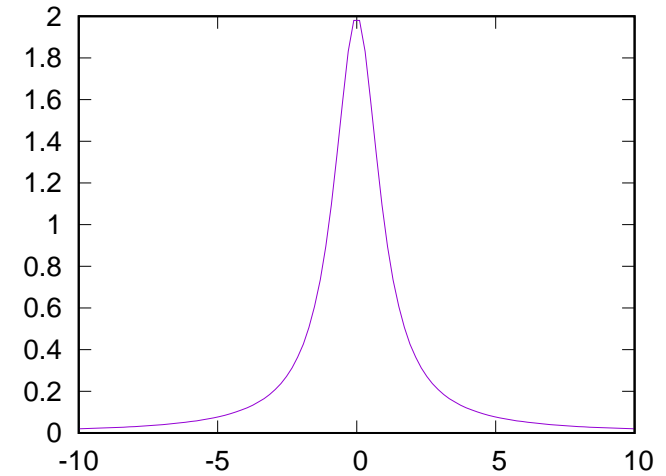
$$F(\Omega) = \frac{2}{1 + \Omega^2}$$

となる.

$f(t)$ と $F(\Omega)$ の関係は以下の通り.



$f(t)$



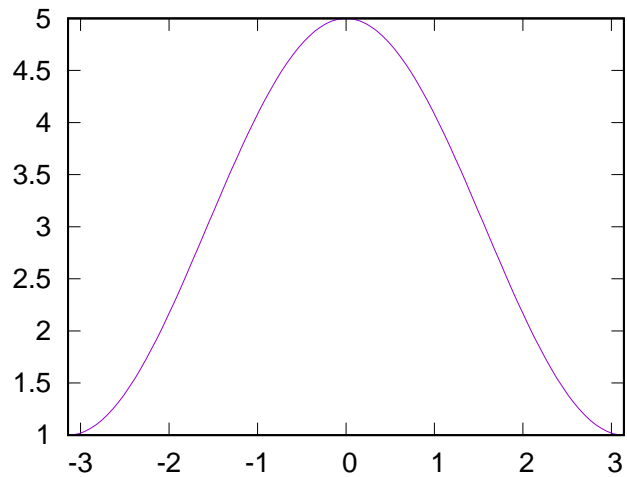
$F(\Omega)$

- この例ではフーリエ係数やフーリエ変換は実数値になっているが、一般にはこれらは複素数値である.

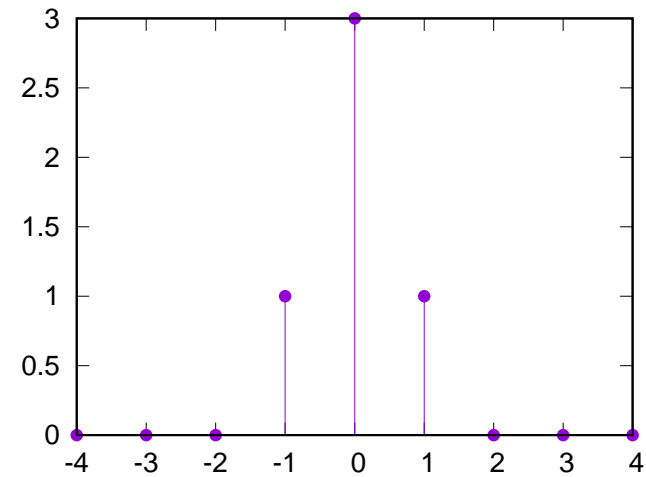
- 今後, 模式的な図を描くときには, フーリエ係数やフーリエ変換の振幅情報をイメージして実数値関数のように見えるグラフがあるが, 振幅の情報と併せて位相の情報も存在することを忘れないように.

離散時間フーリエ変換

- 周期 T の連続時間信号 $f(t)$ では, 独立変数 t は $[-T/2, T/2] \in \mathbb{R}$ の任意の値を取った. そして, 対応するフーリエ係数 C_n は, $n \in \mathbb{Z}$ において定義された. また, フーリエ係数の集合 $\{C_n : n \in \mathbb{Z}\}$ から, もとの信号を合成することができた.

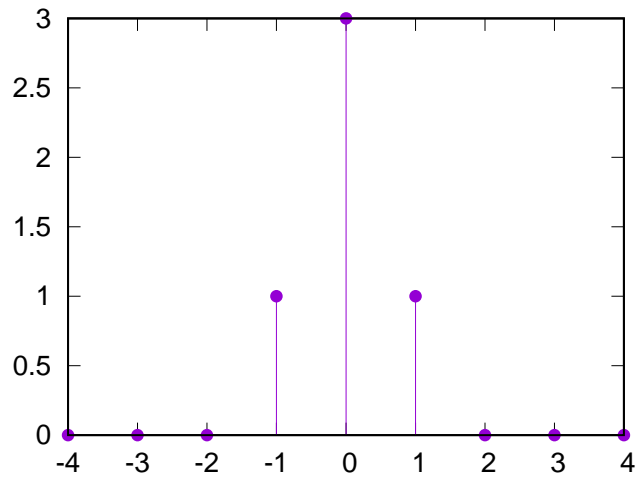


関数

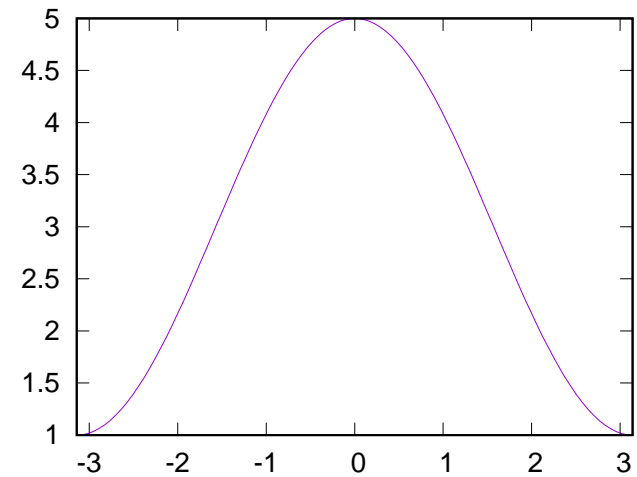


フーリエ係数

- 一方, 離散時間信号 $x(n)$ は, $n \in \mathbb{Z}$ において定義されているものであった.
- そこで, 関数とそのフーリエ係数の関係を反転させて, 次ページのような対応関係を考えることができる.



離散時間信号



関数?

- 離散時間フーリエ変換 (**Discrete-time Fourier Transform, DTFT**) は, 本質的には, 先のページで見たように, 周期関数とそのフーリエ係数の関係を反転させて考えたもの.

- 応用上は, フーリエ級数展開やフーリエ変換と同様に有用.
- ただし, 歴史的経緯から, フーリエ級数とは, 複素共役の取り方に相異がある.

- 以下の対になった式を、**離散時間フーリエ変換対**という。

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{jn\omega} d\omega, \quad n \in \mathbb{Z}$$

第一の式を**解析**，第二の式を**合成**と呼ぶことがある。

- 歴史的な理由から、複素共役の取り方が逆になってしまっているが...

- 複素フーリエ係数:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-jnt} dt$$

- 離散時間フーリエ変換 (合成):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{jn\omega} d\omega$$

- 複素フーリエ級数

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnt}$$

- 離散時間フーリエ変換 (解析)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega}$$

- 離散時間フーリエ変換と複素フーリエ級数がやっていることは同じ (使い方が違うだけ).

スペクトル

- 時間領域の信号をフーリエ級数展開したときの係数や, 信号をフーリエ変換した関数のことを, **スペクトル**あるいは**スペクトラム**と呼ぶ

フーリエ変換と離散時間フーリエ変換

- 連続時間の信号 x が標本化周期 T_s で標本化されているものとし, $x[n] = x(nT_s)$ とする. $(x[n])_{n \in \mathbb{Z}} \in l_1$ と仮定する.
- $(x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ の離散時間フーリエ変換が $(-\pi, \pi]$ で定義されているものとし, これを周期関数に拡張しておく

- 以下の対になった式を，離散時間フーリエ変換対という（復習）．区間の変更に注意．フーリエ変換と区別するため， $X_{\text{DTFT}}(\omega)$ という記号を使っている．

$$X_{\text{DTFT}}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}, \quad \omega \in (-\pi, \pi],$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_{\text{DTFT}}(\omega)e^{jn\omega} d\omega, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- 連続時間信号 x はフーリエ変換可能である (フーリエ変換してから逆フーリエ変換するとともに戻る関数) と仮定し, x をフーリエ変換したものを X_{FT} と書く. X_{FT} と X_{DTFT} の関係を知りたい.
- 逆フーリエ変換の公式から,
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{\text{FT}}(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$
 である.

- $t = nT_s$ では $x[n]$ は次のようになる。

$$x[n] = x(nT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{\text{FT}}(\Omega) e^{j\Omega nT_s} d\Omega$$

- 積分の区間を $\left((m - \frac{1}{2}) \frac{2\pi}{T_s}, (m + \frac{1}{2}) \frac{2\pi}{T_s} \right]$ に分割すると ($m \in \mathbb{Z}$),

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{(m - \frac{1}{2}) \frac{2\pi}{T_s}}^{(m + \frac{1}{2}) \frac{2\pi}{T_s}} X_{\text{FT}}(\Omega) e^{j\Omega nT_s} d\Omega$$

- 各区間で $\Omega' = \Omega - m\frac{2\pi}{T_s}$ という変数変換をすると, $e^{j\Omega nT_s} = e^{j(\Omega' + m\frac{2\pi}{T_s})nT_s} = e^{j\Omega' nT_s}$ より,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-\frac{\pi}{T_s}}^{\frac{\pi}{T_s}} X_{\text{FT}}(\Omega' + m\frac{2\pi}{T_s}) e^{j\Omega' nT_s} d\Omega'.$$

記号が Ω' のままだと見にくいので, Ω に書き換えておく.

- 逆フーリエ変換を使って X_{FT} から $x[n]$ を求める式は最終的に以下のようなになる. X_{FT} を横方向に $\frac{2\pi}{T_s}$ の整数倍ずらしたものの全体が足し合わされていることに注意.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-\frac{\pi}{T_s}}^{\frac{\pi}{T_s}} X_{\text{FT}} \left(\Omega + m \frac{2\pi}{T_s} \right) e^{j\Omega n T_s} d\Omega.$$

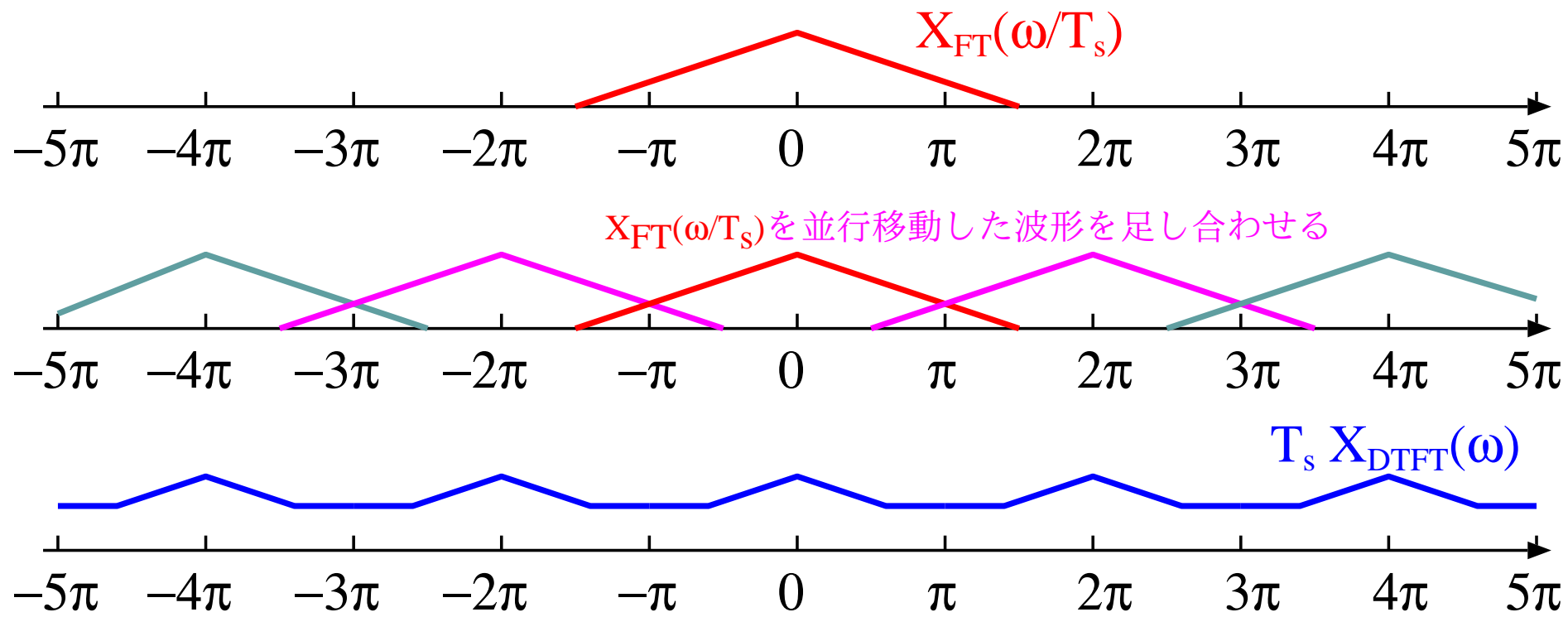
- 離散時間フーリエ変換との対応を取るため、 $\omega = \Omega T_s$ という変数変換をおこない (縮尺の変更), 積分の範囲を $(-\pi, \pi]$ に変えると, 次のようになる. 縮尺が変わった結果, 変数 Ω に関する $2\pi/T_s$ の整数倍のずれは, 変数 ω に関する 2π の整数倍のずれに変わること注意到.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi T_s} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_{\text{FT}} \left(\frac{\omega}{T_s} + m \frac{2\pi}{T_s} \right) e^{j\omega n} d\omega.$$

- $(x[n])_{n \in \mathbb{Z}} (\in l_1)$ の離散時間フーリエ変換は一意的だから、先の積分記号の内部は、 T_s に関する倍率の部分を除き、 $(x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ の離散時間フーリエ変換と一致する。すなわち、次の等式が成り立つ。

$$X_{\text{DTFT}}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_{\text{FT}} \left(\frac{\omega}{T_s} + m \frac{2\pi}{T_s} \right).$$

- $X_{\text{DTFT}}(\omega)$ は, $X_{\text{FT}}(\omega/T_s)$ を 2π の整数倍ずらしたものの全体を足し合わせ, 全体を $1/T_s$ で割ったものになる (次ページの図を参照).



帯域制限信号

- コンピュータ等で信号を処理する際に連続時間信号をそのまま記録することは困難であり、ふつうはそれを標本化した信号が記録される.
- 先と同様に、連続時間の信号 x が標本化周期 T_s で標本化されているものとし、 $x[n] = x(nT_s)$ とする.

- x はフーリエ変換可能であると仮定し、それをフーリエ変換したものを X_{FT} と書く。また、 $(x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ を離散時間フーリエ変換したものを X_{DTFT} と書く。
- 応用上 X_{FT} が必要となることはあるが、これを厳密に求めるためには連続時間信号 x の全時刻における値を積分する必要がある、実現は困難。

- 一方, X_{DTFT} は無限級数によって決まるので, 無限級数を有限項で打ち切れば, 一定の精度で近似可能.
- そこで, X_{DTFT} から X_{FT} を求めることの可否を考える.

- 信号は電波や音波などによって伝えられるが、信号として価値を持つのは、多くの場合、その波に含まれる周波数の絶対値が一定以下の成分である。そこで、周波数の絶対値が一定以下の成分のみを含む信号を考える。

- $\Omega_B = \sup\{|\Omega| : X_{\text{FT}}(\Omega) \neq 0\}$ とする.
- Ω_B が有限の値を取るとき, 信号 x を **帯域制限信号** という.
- $F_B = \Omega_B/2\pi$ とおく (Ω_B のスケールは角周波数であり, これを周波数のスケールに変更すると F_B になる).

- x が帯域制限信号, $(x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ をそれを標本化周期 T_s で標本化した信号とする. x はフーリエ変換可能と仮定する. $F_s = 1/T_s$ を標本化周波数, $\Omega_s = 2\pi F_s$ を標本化角周波数とする. $2F_B < F_s$ と仮定する.

- このとき, X_{FT} を $\Omega_s = 2\pi/T_s$ の整数倍横にずらしたものをすべて足し合わせても,

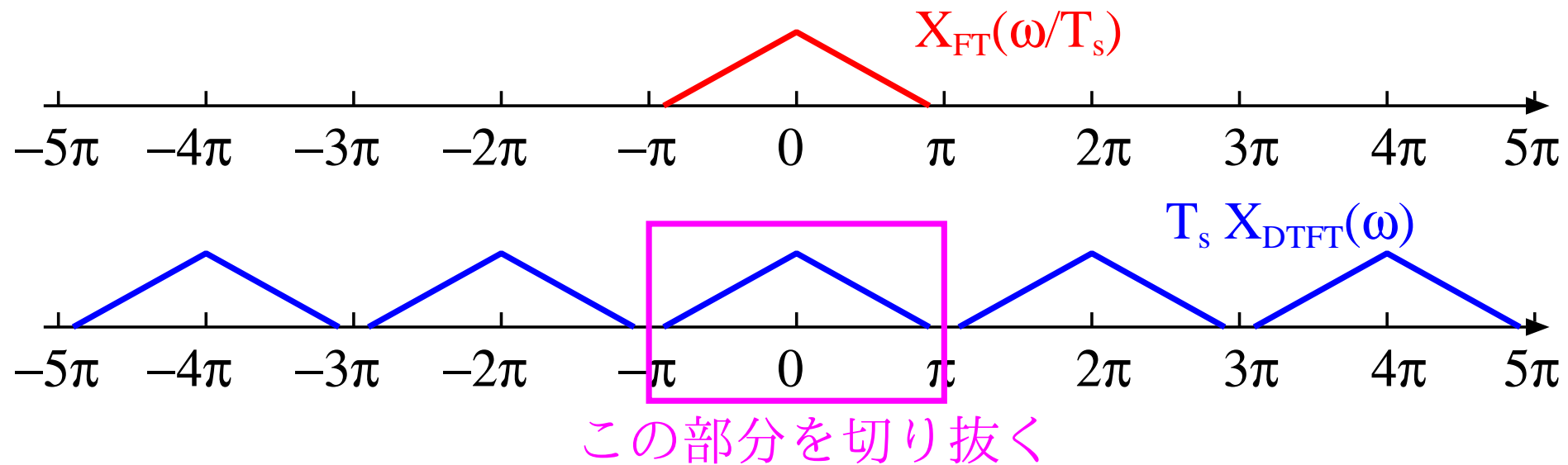
$$(-\Omega_s/2, \Omega_s/2]$$

の範囲で波形が変わることはないから …

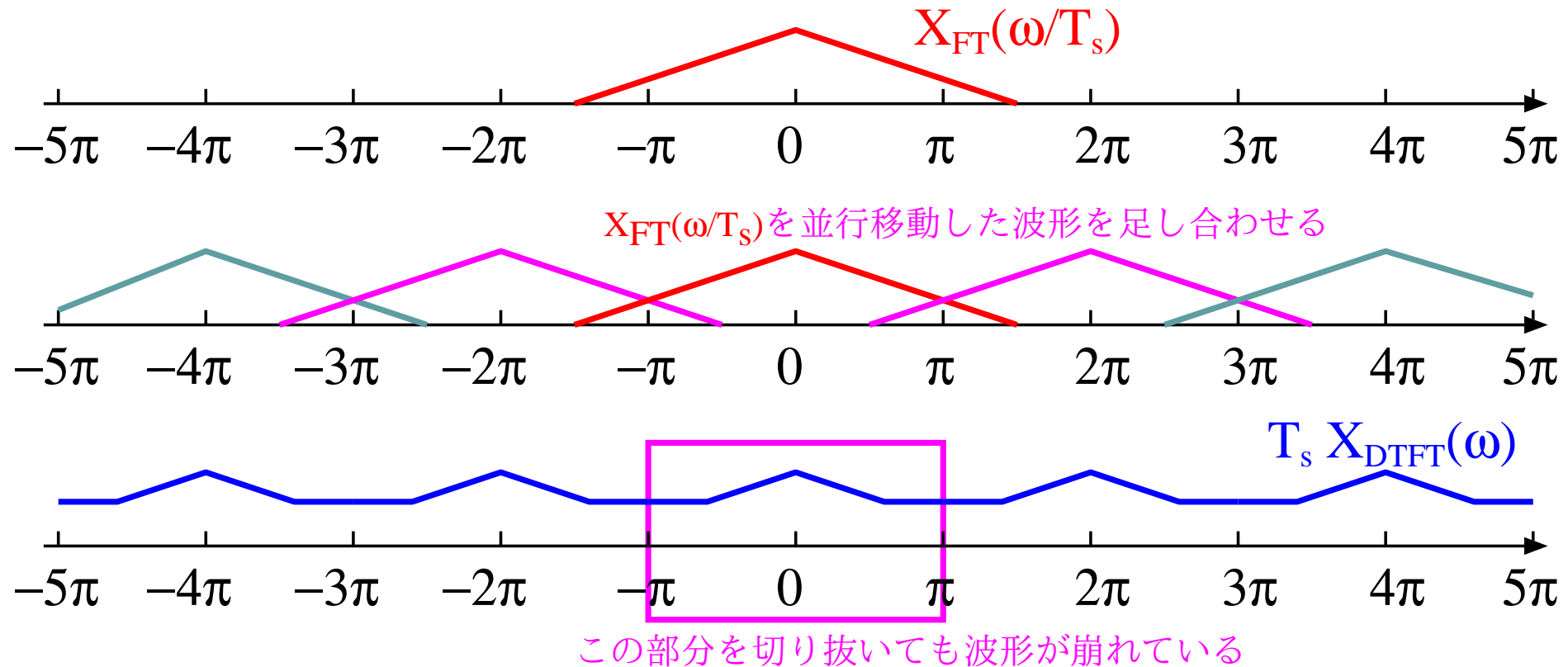
- $X'_{\text{FT}}(\omega) = X_{\text{FT}}(\omega/T_s)$ とする (横軸のスケールの変換).
- X'_{FT} を 2π の整数倍横にずらしたものをすべて足し合わせても, $(-\pi, \pi]$ の範囲では波形が変わることはない.
- $2F_B$ を **ナイキストレート** あいるは **ナイキスト周波数** と呼ぶ.

- $2F_B < F_s$ であれば, X_{DTFT} から横軸の $(-\pi, \pi)$ の部分を抽出し, 残りの部分をすべて零としてから縮尺を変更することで, X_{FT} を復元できる.
- 一方, $2F_B \geq F_s$ のときには, X_{FT} を左右にずらしたものの重複部分が加算され, 波形が崩れるため, X_{DTFT} から X_{FT} を復元することはできない (次ページ図参照).

- $F_s > 2F_B$ のとき: 切り抜けばもとの波形 (T_s に注意, 縦方向の縮尺の調整は必要)



- $F_s \leq 2F_B$ のとき: 切り抜いた波形が崩れる

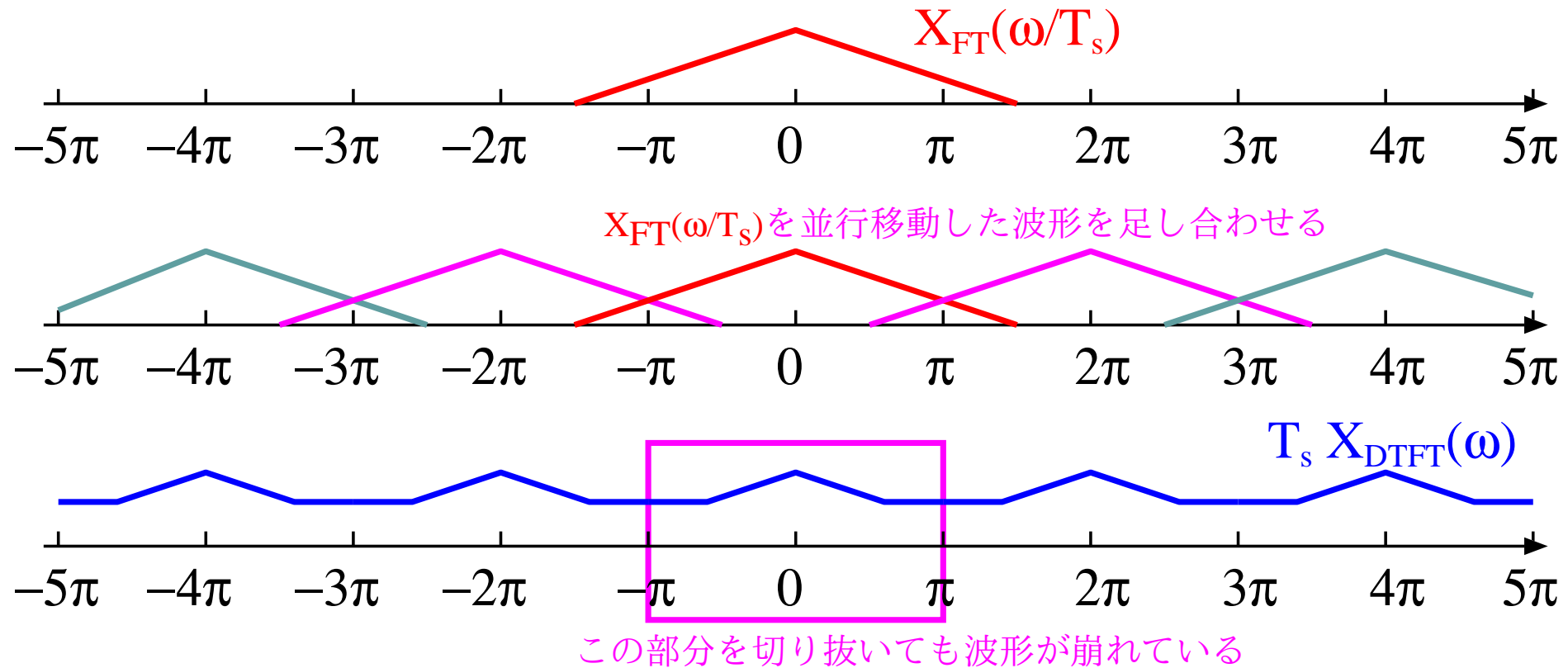


エイリアシング

- 先に見たように、信号 x の標本化をおこなう際、標本化周波数がナイキストレートより低いと、 X_{DTFT} から X_{FT} を復元するはできない。
- この原因は、 X_{FT} を左右に $2\pi/T_s$ の整数倍ずらしたものと X_{FT} に重なる部分があり、加算によって波形が崩れること。

- $F_s \leq 2F_B$ のとき, X_{FT} の角周波数の絶対値が πF_s 以上の成分は, 角周波数 πF_s のところで折り返されて, 低い角周波の成分として X_{DTFT} に加算される. この現象を **エイリアシング** という.
- これのよって発生する歪みを **折り返し歪み** と呼ぶことがある.
- 確認のため, 先の図を再掲する.

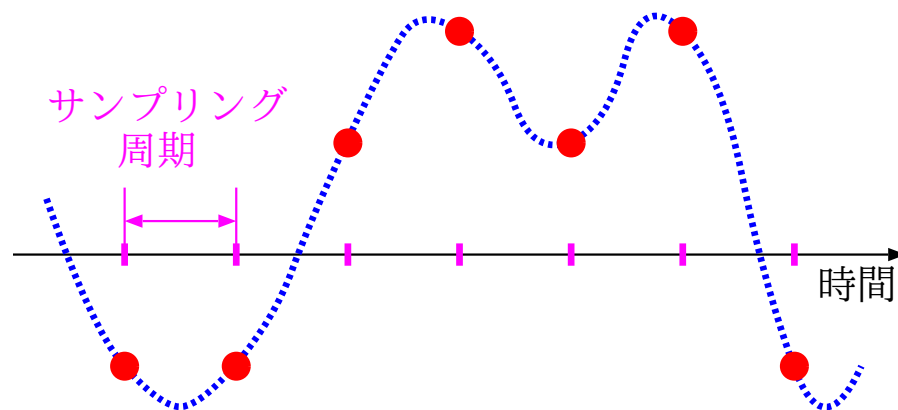
- エイリアシング:



標本化定理

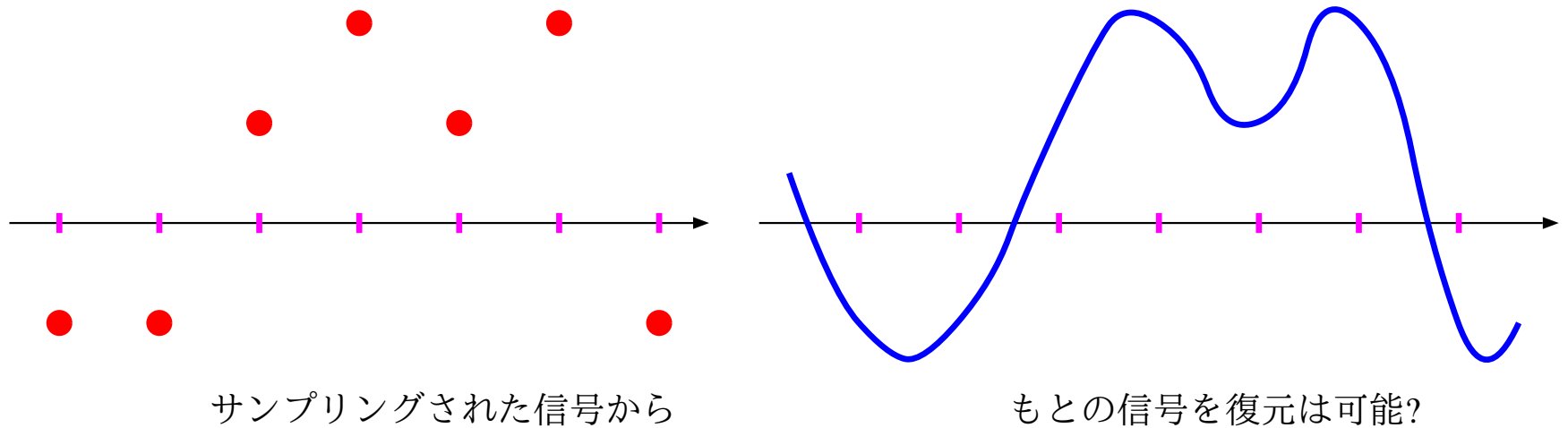
- 標本化とは, 連続的に変動する波形から離散的な時刻における標本値を抜き出す作業であった.

- 標本化によって、標本点間の波形のデータは失われる。

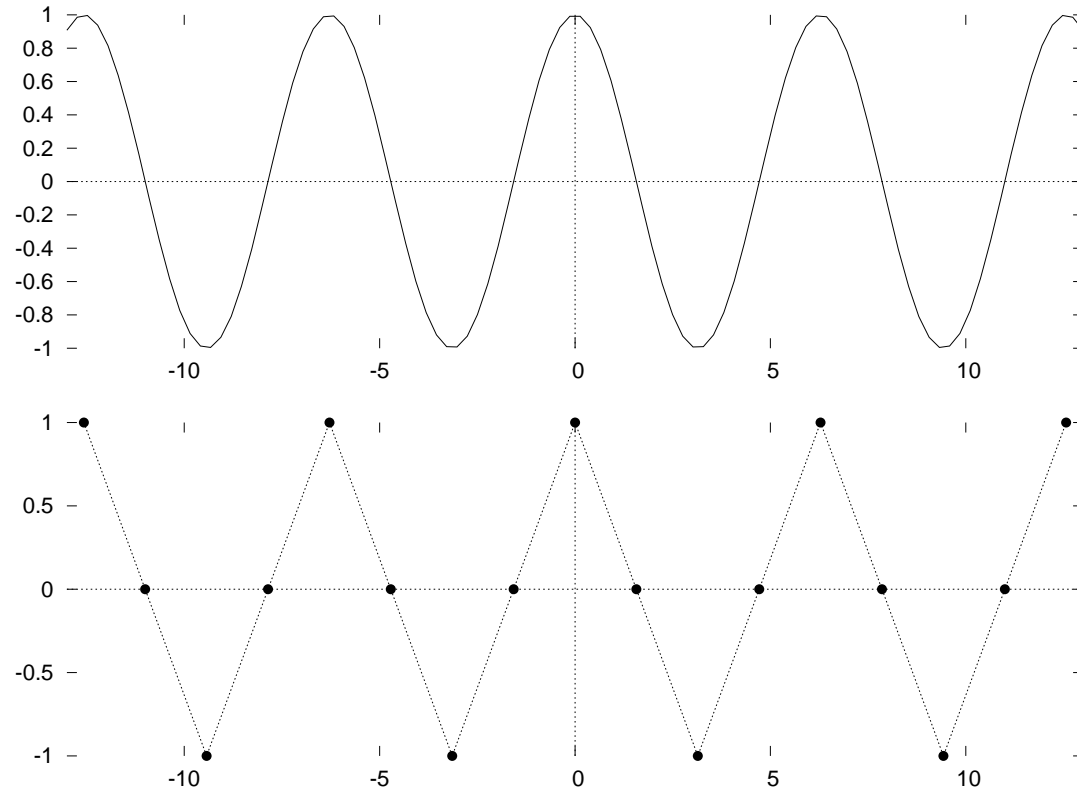


サンプリングによって青い線の部分の情報は失われ
赤い点の部分の情報のみが残る。

- 標本化された信号から、標本点間の値を含む完全な信号が復元可能か否かという問題を考える。



- 一般の場合にはできるわけがないのだが…
- もとの波形が正弦波であることがわかっているのなら, 1 周期あたり 2 点を超えるデータがあれば, そこからもとの波形が復元できる.



上の波形は、正弦波であることが既知なら、下のデータから復元可能.

- 信号が周波数 F_B で帯域制限され, サンプルング周波数が F_s であるとき,

$$\frac{1}{F_B} > \frac{2}{F_s}$$

すなわち

$$F_s > 2F_B$$

であれば, この条件が満たされる.

- この条件は, エイリアシングが発生しないための条件と同一である.

- 先に述べたように, 信号 x が

$$F_s > 2F_B$$

を満たすサンプリング周波数で標本化されていけば, 信号 x の標本からサンプリングする前の信号のフーリエ変換 X_{FT} を決定することができるから, X_{FT} を逆フーリエ変換することにより, 信号 x の各時刻における値を, 標本の間値も含めて, 決定することができる.

- 標本間のデータを補うことを**補間**と呼ぶ. 補間によって得られる信号は多くの場合は元信号の近似であるが, 適切にサンプリングされた帯域制限信号では, 補間のしかたを工夫することにより, 元信号を完全に復元することができる.

- 「補間のしかたの工夫」というのは、上述のように、信号の離散時間フーリエ変換から $(-\pi, \pi]$ の部分を切り出して T_s 倍し、それ以外の部分の値を零に設定してから、逆フーリエ変換することを言う。ただし、これは「できる」というだけであって、実用上はいちいち逆フーリエ変換の計算をするのは必ずしも現実的でない。

- 歴史的理由により、先に述べた事実を**標本化定理**、**サンプリング定理**などと呼ぶが、上述のように、これはエイリアシングが発生しないための条件と同一である。

- 標本化定理は、帯域制限された信号を十分高いサンプリング周波数でサンプリングした場合には、標本値からもとの連続時間信号を完全に復元する特別な補間法が存在するということを述べた定理であり、任意のホールド（たとえば零次ホールド）によってもとの連続時間信号が復元できると述べているわけではないことに注意せよ。

離散フーリエ変換

- 信号処理では、離散フーリエ変換と呼ばれる変換もよく用いられる。
- これは、離散時間フーリエ変換と関係はあるが、別物である。

- 離散時間フーリエ変換では…
 - ▷ 信号 $x[n]$ の独立変数 n : 離散的 (整数値)
 - ▷ 信号の長さは無限
 - ▷ その離散時間フーリエ変換の独立変数:
連続的

- 離散フーリエ変換では…
 - ▷ 信号 $x[n]$ の独立変数 n : 離散的 (整数値)
 - ▷ 信号の長さは有限
 - ▷ その離散フーリエ変換の独立変数: 離散的 (整数値)

- 離散フーリエ変換は, 長さ N の信号を対象とする.
- これから, 離散時間フーリエ変換から離散フーリエ変換を誘導してゆくのだが, まず離散時間フーリエ変換の式を再掲する.

- 離散時間フーリエ変換 (和を取る記号を n から k に変えてある)

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk\omega}$$

- 離散時間フーリエ変換において、信号 x の長さが N 、すなわち、

$$x[0], x[1], x[2], \dots, x[N - 1]$$

以外の値はすべて零であるものとする。

- この場合, 離散時間フーリエ変換は以下のよう
に有限和となる.

$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]e^{-jk\omega}$$

- 変換後の信号 $X(\omega)$ は長さ 2π の区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された周期関数なのであるが...
- 関数 $X(\omega)$ は独立変数が連続的に動く関数なので、コンピュータによる数値計算には向かない。
- そこで、 $X(\omega)$ の方も等間隔でサンプリングし、 $X(\omega)$ をサンプル点における値で近似することを考える。

- もとの信号 x の長さが N であったので、それに合わせて、 $X(\omega)$ の方も区間 $[-\pi, \pi]$ を N 等分したサンプル点についてのみ、値を計算する。

- e^{-jkw} において, $\omega = 2m\pi/N$
(ただし $0 \leq m < N$)
における値を計算するのだから,

$$X\left(\frac{2m\pi}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]e^{-jk2m\pi/N}$$

- 先の式を見易くするために, $W_N = e^{-j2\pi/N}$ と定義する.
- 時間領域の信号の書き方に合わせて, 周波数の方もサンプリングの間隔 $2\pi/N$ に関する記述を省略し,

$$X[m] = X\left(\frac{2m\pi}{N}\right)$$

と書くことにする.

- このようにして得られるのが離散フーリエ変換である.
- 次ページに, 改めて離散フーリエ変換の式を書き直しておく.

- 長さ N の離散時間信号 x の離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform, DFT) は, 次式により定義される.

$$X[m] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W^{mk} \quad (0 \leq m < N).$$

- 長さ N の信号 X の逆離散フーリエ変換 (Inverse Discrete Fourier Transform, IDFT) は、次式により定義される。

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] W_N^{-mn} \quad (0 \leq n < N).$$

- 要するに、離散フーリエ変換とは、離散時間フーリエ変換において、周波数軸の方もサンプリングし、周波数軸上の標本点のみで離散時間フーリエ変換したもの。

- 離散フーリエ変換で用いられる係数の全体

$$\{W_N^{-mn} : 0 \leq m < N, 0 \leq n < N\}$$

を回転因子と呼ぶのであるが、これは集合としては

$$\{W_N^{-n} : 0 \leq n < N\}$$

と一致する。

- この集合は, もとの記法に戻すと

$$\{e^{-j2\pi n/N} : 0 \leq n < N\}$$

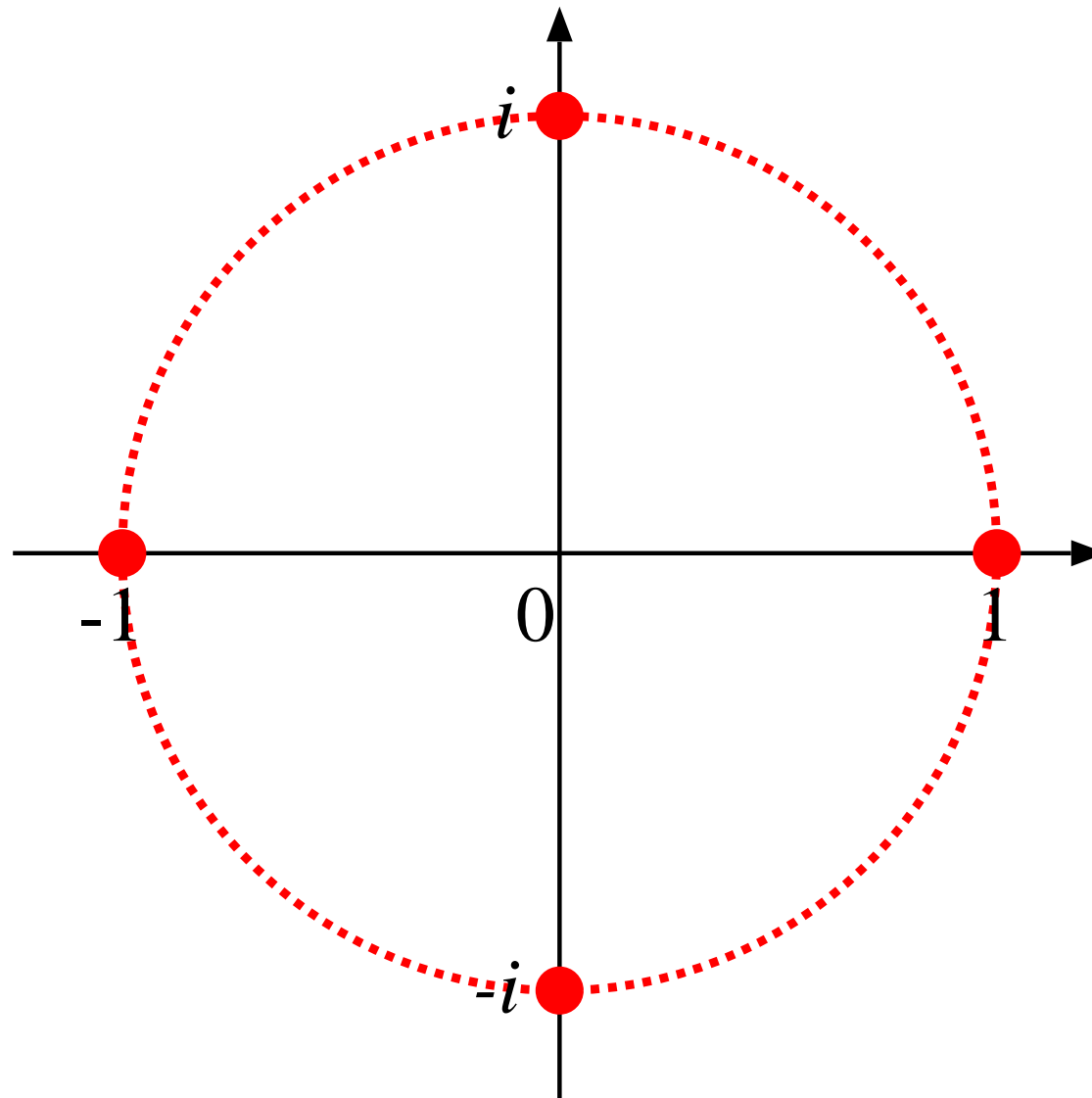
であり, 複素平面上の単位円を N 等分する点になっている.

- たとえば, $N = 4$ の場合 (信号の長さが 4) の場合には,

$$\begin{aligned} & \{e^{-j2\pi n/4} : 0 \leq n < 4\} \\ & = \{1, e^{-j\pi/2}, e^{-j\pi}, e^{j3\pi/2}\} \\ & = \{1, -i, -1, i\} \end{aligned}$$

であり, 複素平面上の単位円を 4 等分している (次ページ図).

回転因子 ($N=4$ の場合)



- 標本点では離散時間フーリエ変換と離散フーリエ変換は厳密に一致するが…
- 離散フーリエ変換では、周波数軸上での標本点間の情報は失われている。
- 一方で、離散フーリエ変換の計算は離散時間フーリエ変換よりもずっと簡単。

- 数学的に言うと、離散フーリエ変換は、信号 $x[0], \dots, x[N - 1]$ を N 次のベクトルと解釈し、それに $W_N = e^{-j2\pi/N}$ から誘導される N 行 N 列の正則行列を乗じたものである。ここで現れた正則行列の逆行列を長さ N の信号に乗ずる演算が逆離散フーリエ変換である。

- 離散時間フーリエ変換と離散フーリエ変換の対比を改めて述べる.

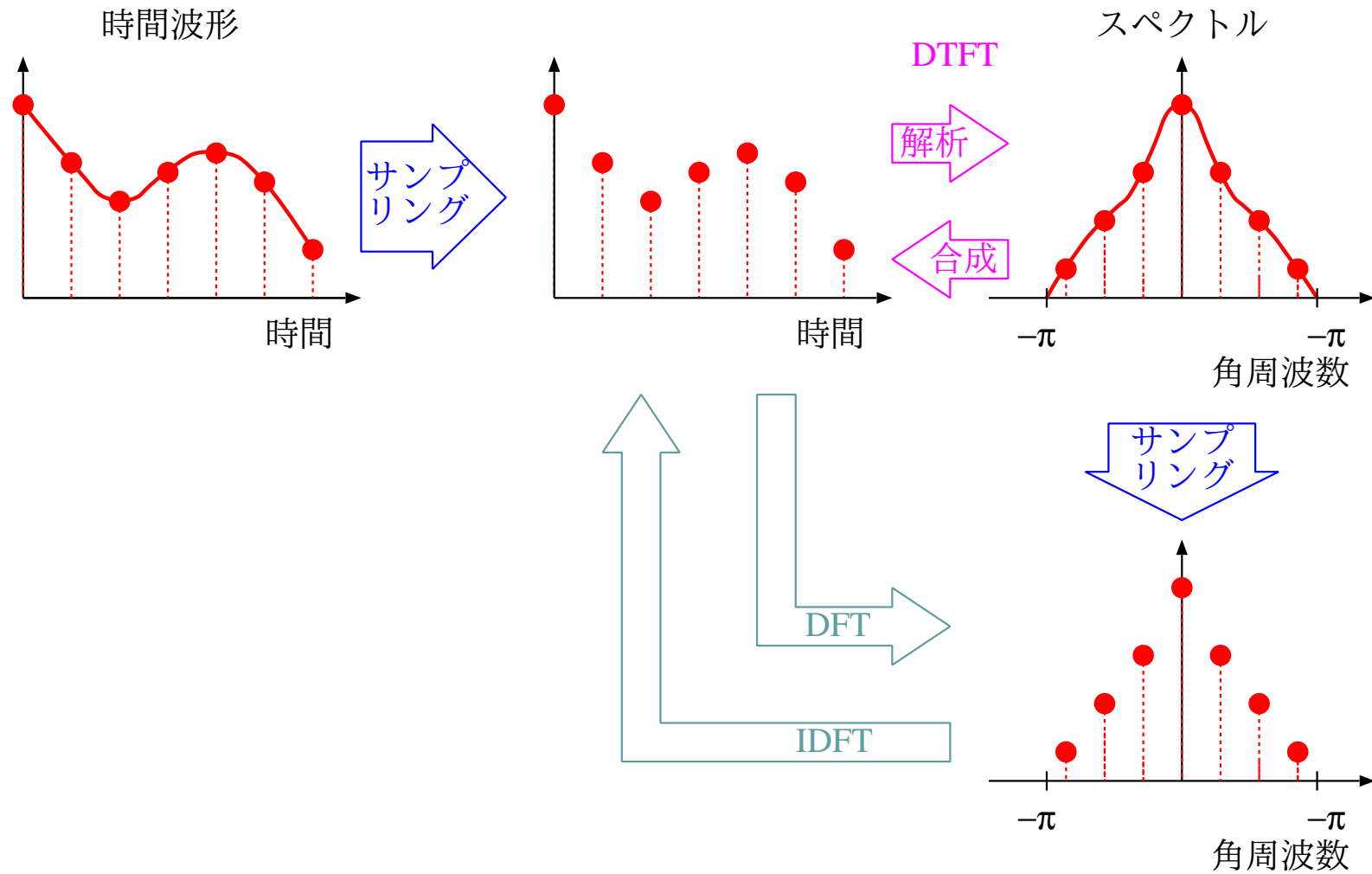
- 離散時間フーリエ変換では…
 - ▷ 解析: 無限和
 - ▷ 合成: 積分

- 離散フーリエ変換では…

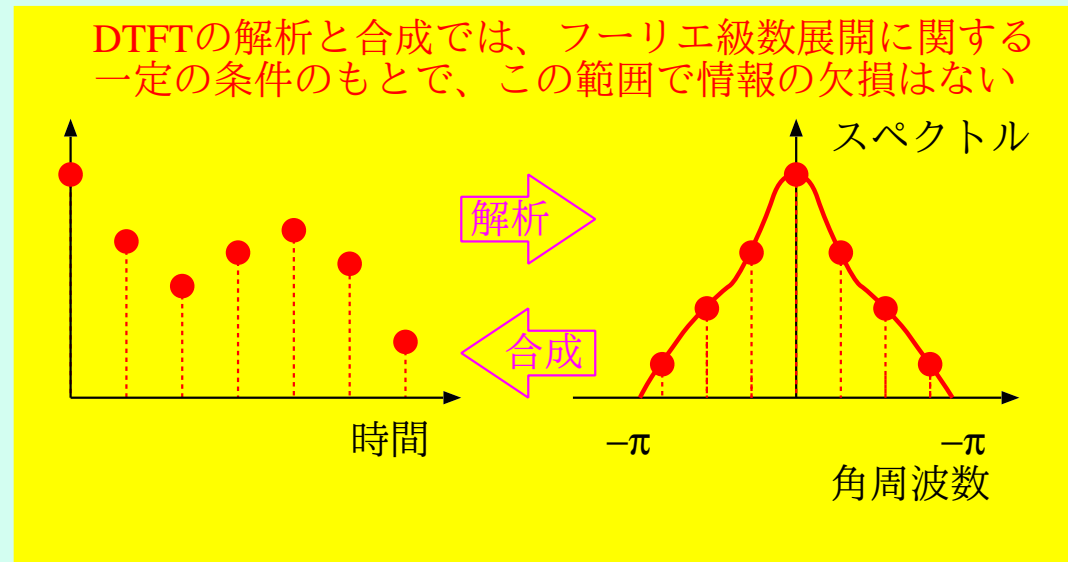
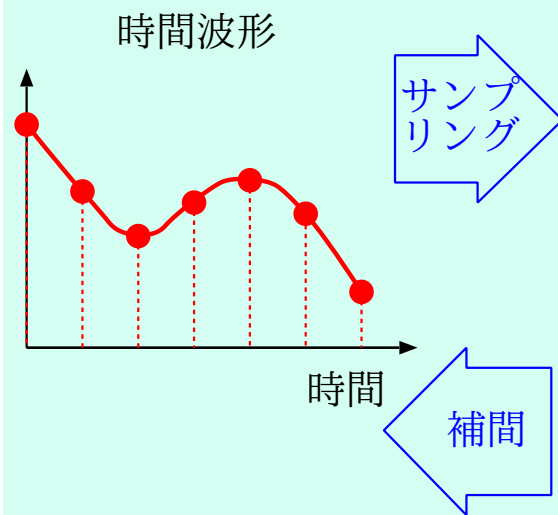
- ▷ 離散フーリエ変換: 信号 (ベクトルに直したものと) と正則行列の積
- ▷ 逆離散フーリエ変換: 信号 (ベクトルに直したものと) と正則行列の積

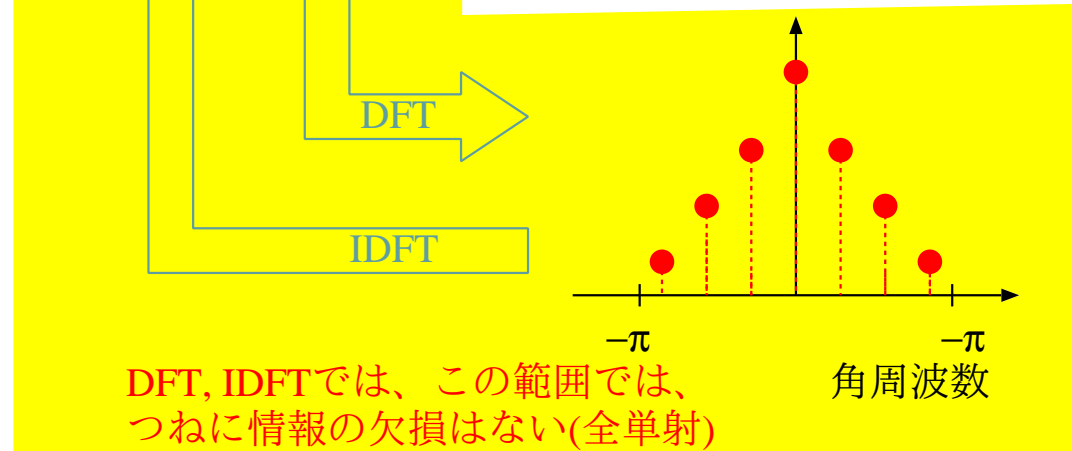
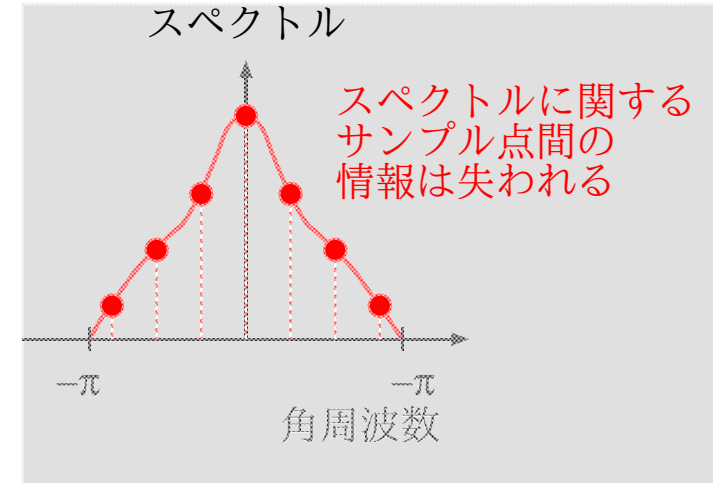
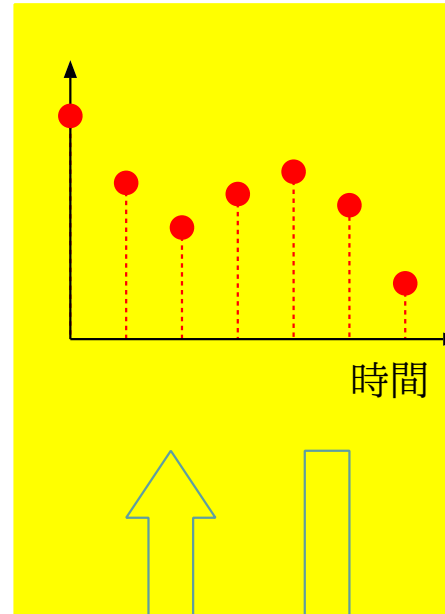
- このため、離散フーリエ変換の計算は、離散時間フーリエ変換より、ずっと簡単になる。
- 簡単になったことには代償があり、離散フーリエ変換では、時間軸、周波数軸ともに、サンプル点間における信号の値の情報は失われる。

- 改めてこれらの関係を図で示す.



信号が帯域制限され、適切なサンプリング周期でサンプリングされていれば、補間によって連続時間の波形そのものを復元することができる(サンプリング定理)





- 離散フーリエ変換にはコンピュータによる数値計算を劇的に効率化する高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform; FFT) という計算法があり, 20 世紀の性能が低いコンピュータでも十分実用になるほど高速であったので, 応用上は離散フーリエ変換が使われることが多い.

- FFT は離散フーリエ変換を効率良く計算するためのアルゴリズムであり, 計算される結果自体は離散フーリエ変換と同一である. 離散フーリエ変換と違う概念が導入されたわけではないので注意せよ.

- 今日では、パソコンで信号処理するのであれば、離散フーリエ変換で現れる程度の大きさの行列による積は、信号長が短かければ計算負荷という点では問題にならない。一方で、信号長が長くなると、離散フーリエ変換の直接計算の計算量は激増するので、FFTが有利になる。

- 実は, 連続時間信号を有限長で打ち切って, 残りの部分を零とおいた時点で, この信号は帯域制限の条件を満たさなくなっている.

- これを確認する.

- 信号 $x(t)$ の性質がよく, それをフーリエ変換してから逆フーリエ変換するともとに戻るものと仮定する. また, $x(t)$ とそのフーリエ変換 $X(\Omega)$ は何回でも微分可能であると仮定する.

- この仮定のもとで, さらに
 - ▷ $x(t)$ が区間 $[-T, T]$ の外では恒等的に零
 - ▷ $X(\Omega)$ が区間 $[-W, W]$ の外では恒等的に零

と仮定すると, $x(t)$ が恒等的に零になってしまうことを示す.

- 仮定より,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega$$

である.

- $|t_0| > |T|$ となる t_0 をひとつ固定する. 仮定より, $x(t)$ は t_0 のある近傍 $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ で恒等的に零となるから, $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ であれば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) = 0$$

である. よって, $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}x(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \int_{-W}^W X(\Omega)e^{i\Omega t} d\Omega \\ &= \int_{-W}^W (i\Omega)^n X(\Omega)e^{i\Omega t} d\Omega \\ &= 0\end{aligned}$$

ただし、定積分と微分の順序が交換可能であると仮定した。

ここで $t = t_0$ とすれば,

$$\int_{-W}^W (i\Omega)^n X(\Omega) e^{i\Omega t_0} d\Omega = 0$$

となる.

- さて,

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\Omega) e^{i\Omega(t-t_0)} e^{i\Omega t_0} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{i\Omega(t-t_0)} X(\Omega) e^{i\Omega t_0} d\Omega\end{aligned}$$

であるが...

- 前ページの式で $e^{i\Omega(t-t_0)}$ をテイラー展開すると...

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\Omega)^n (t - t_0)^n X(\Omega) e^{i\Omega t_0} d\Omega \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{2\pi n!} \int_{-W}^W (i\Omega)^n X(\Omega) e^{i\Omega t_0} d\Omega\end{aligned}$$

(ただし積分と無限和の順序が交換可能であることを仮定した).

- $\int_{-W}^W (i\Omega)^n X(\Omega) e^{i\Omega t_0} d\Omega = 0$ となることは既
に示されていたから…
- 任意の t に対して, $x(t) = 0$ となる.

- 先ほどの計算の意味は、時間軸におけるある有限の区間でのみ零でない値を取る連続時間信号は帯域制限されていない (任意の高周波成分を含む) ということである.
- したがって、離散時間フーリエ変換を離散フーリエ変換で置き換えることによって情報の喪失が発生することは不可避であり、これを解消する手段はない.

z 変換

- 信号 $x = (x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ を無限長の信号とする. 信号 x の両側 z 変換とは, 次式によって定まる形式的冪級数である:

$$\mathcal{Z}[x] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}.$$

- 因果的な信号 $x = (x[n])_{n \in \mathbb{N}}$ の信号 x の片側 z 変換とは, 次式によって定まる形式的冪級数である:

$$\mathcal{Z}[x] = \sum_{n \in \mathbb{N}} x[n] z^{-n}.$$

- 信号の z 変換はつねに収束するとは限らないが, 収束領域に関する議論はこの実験では省略する.

- 因果的な信号を $n < 0$ においてその値が恒等的に零となる信号と解釈すると、片側 z 変換は両側 z 変換と一致する。この実験では、常にこの解釈を採用する。
- 同様に、有限長信号についても、その値が指定された範囲外では恒等的に値が零となる無限長信号と解釈する。

システムの伝達関数

- 入力信号と出力信号を z 変換したものの比によってシステムの伝達関数を定義する. z 変換が収束することは暗黙のうちに仮定される.
- u を入力, y を出力, h をシステムのインパルス応答とする
- これらの z 変換を U, Y, H とする.

- $y = h * u$ という入出力関係を持つシステムの伝達関数は, $H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$ によって与えられる.

- 次に、システムが因果的で、その入出力関係が時不変の入出力差分方程式

$$y[n] + \sum_{k=1}^{n_y} a_k y[n - k] = \sum_{l=0}^{n_u} b_l u[n - l]$$

で与えられているものとする。

- 両辺を z 変換すると $Y(z) + \sum_{k=1}^{n_y} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{l=0}^{n_u} b_l z^{-l} U(z)$ となるので、両辺の比をとり、その伝達関数を H とすると、

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{n_u} b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^{n_y} a_k z^{-k}}.$$

システムの周波数応答

- 1 入力 1 出力の線形時不変で BIBO 安定 (Bounded-Input Bounded-Output 安定; 入力
が有界なら出力も有界という意味) な **離散時間** システムに対し, そのインパルス応答の **離散時間フーリエ変換**, あるいはその伝達関数の変数 z に $e^{j\omega}$ を代入したものを, システムの **周波数応答** あるいは **周波数特性** と呼ぶ.

- 周波数応答 $H(\omega)$ の絶対値をシステムの**振幅周波数特性**あるいは**振幅特性**という.
- 周波数応答 $H(\omega)$ の偏角をシステムの**位相周波数特性**あるいは**位相特性**という. 偏角の取り方には色々な流儀があるので注意.

デジタルフィルタ

- 一般的な英単語 “filter” の意味は次の通り：
濾過器, 濾過板, 水こし, 濾紙, (タバコの) フィルター, (写・光) フィルター, 濾光器, フィルター (典拠はリーダーズ英和辞典).

- 物理/工学の分野での「フィルタ」の意味は次の2通り (典拠はブリタニカ国際大百科事典).
 - ▷ 白色光源などから特定の波長領域の光だけを取り出す光学素子.
 - ▷ 特定の周波数だけの交流信号を通し, 他の周波数のものは通さないようにした回路.

- 信号処理の分野では、「フィルタ」という言葉は、信号からの不要な要素の除去や信号の特定の箇所を強調などをおこなう装置、回路、プログラムなどのことを指すことが多い。
- 日常語では「フィルター」という言葉が使われることが多いが、工学では「フィルタ」という言葉が使われることが多い。

- フィルタはアナログフィルタとデジタルフィルタの2種類に大別される.
- アナログフィルタは, アナログ信号を処理の対象とし, アナログ回路や素子などから成るフィルタである.

- デジタルフィルタという言葉は、次の2通りの意味で用いられる。
 - ▷ デジタル信号を処理の対象とし、デジタル回路や素子から成るフィルタ
 - ▷ アナログ信号を処理の対象とし、デジタル回路や素子およびデジタルとアナログのインターフェースから成るフィルタ

デジタルフィルタの分類

- 独立変数に関する分類
 - ▷ 時間領域のフィルタ
 - ▷ 周波数領域のフィルタ (こちらが一般的)

- フィルタの構造に関する分類
 - ▷ 時不変/時変フィルタ
 - ▷ 線形/非線形フィルタ

- 利用目的に関する分類
 - ▷ 信号の特定の周波数成分を選択する
 - ▷ 信号から雑音を除去する
 - ▷ 信号を復元する
 - ▷ 信号を予測・補間する
 - ▷ (他にも色々なものがあり得る)

- 線形時不変なフィルタのインパルス応答から見た分類
 - ▷ インパルス応答が有限時間経過後に恒等的に零となるフィルタ (Finite Impulse Response(FIR) フィルタ)
 - ▷ インパルス応答が有限時間経過後に恒等的に零となることがないフィルタ (Infinite Impulse Response(IIR) フィルタ)

周波数選択性フィルタ

- フィルタの中でもよく使われるのは、**周波数選択性フィルタ**と呼ばれるフィルタ。
- これは、線形時不変のフィルタであって、信号のうち特定の周波数成分を通過させ、特定の成分を阻止するもので、デジタルフィルタ、アナログフィルタでともに用いられる。
- 代表的なものは次の4種。

- 低域通過フィルタ (ローパスフィルタ;Low-Pass Filter;LPF)
- 高域通過フィルタ (ハイパスフィルタ;High-Pass Filter;HPF)
- 帯域通過フィルタ (バンドパスフィルタ;Band-Pass Filter;BPF)
- 帯域阻止フィルタ (バンドエリミネーションフィルタ;Band-Elimination Filter;BEF)

- **低域通過フィルタ**: 信号の低周波成分のみ通過させるフィルタ. 理想的には振幅スペクトルが低周波域で 1, 高周波域で零. 低周波域と高周波域の周波数は設計次第 (以下同じ).
- **高域通過フィルタ**: 信号の高周波成分のみ通過させるフィルタ. 理想的には振幅スペクトルが高周波域で 1, 低周波域で零.

- **帯域通過フィルタ**: 信号の指定した帯域の周波成分のみ通過させるフィルタ. 理想的には振幅スペクトルが指定した帯域で 1, それ以外で零.
- **帯域阻止フィルタ**: 信号の指定した帯域の周波成分のみ遮断するフィルタ. 理想的には振幅スペクトルが指定した帯域で零, それ以外で 1.

- 以上では位相特性については述べなかったが、理想的には**直線位相**と呼ばれる性質を持つことが望ましい(後述).
- 信号を通過させたい帯域を**通過域**, 阻止したい帯域を**阻止域**と呼ぶ.
- フィルタを設計する際には, 通過域と阻止域のあいだに**過渡域**あるいは**遷移域**と呼ばれる特性を指定しない領域を設ける必要がある.

- 応用でよく用いられるフィルタは実数のインパルス応答を持つが, そのようなフィルタの周波数特性は, 周波数軸上の原点に関して対称性を持つ.
- 今まで述べてきた「周波数応答」は離散時間フーリエ変換を前提としたおり, 周期 2π の周期関数である. また, (角) 周波数領域として区間 $[-\pi, \pi]$ を取ることが一般的である.

- 角周波数が $[-\pi, \pi]$ に正規化されているとき、周波数は $[-1/2, 1/2]$ に正規化されている
- 正規化された周波数と角周波数のどちらも **正規化周波数** と呼ばれることがある
- この実験では、正規化された周波数 (角周波数ではなく) を用いる。周波数応答は原点に対して対象なので、周波数軸として意味を持つのは、横軸が $[0, 1/2]$ の範囲である。

- デジタルフィルタでアナログ信号を処理するときの注意を述べる.
- 信号 x に対し, $\Omega_B = \sup\{|\Omega| : X_{\text{FT}}(\Omega) \neq 0\}$ としたとき, (X_{FT} は信号 x のフーリエ変換), x を帯域制限信号と呼び, $2F_B = \Omega_B/\pi$ を信号 x のナイキストレートと呼んだ.
- デジタルフィルタのサンプリング周波数を F_s とする.

- デジタルフィルタで正しい処理がおこなえるためには、 $2F_B < F_s$ である必要があった。デジタルフィルタでは、サンプリング周波数を無限に大きくすることはできないから、何らかの方法で処理したい信号を帯域制限してから、それに相応しいサンプリング周波数を選択することになる。この帯域制限自体はデジタルフィルタではできないので、アナログフィルタに頼ることになる。

非再帰型システムと再帰型システム

- 再帰型システムとは、その出力が、現在および過去の入力と、過去の出力から決まるシステムのことをいう。
- 非再帰型システムとは、その出力が、現在および過去の入力から決まるシステムのことをいう。

- 線形時不変の入出力差分方程式の一般形

$$y[n] + \sum_{k=1}^{n_y} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{n_u} b_l u[n-l]$$

を思い出すと、このシステムは、その出力が現在および過去の入力と過去の出力から決まるので、再帰型システムである。

- 次に、先のシステムの特別な場合として、 a_k がすべて零、すなわち

$$y[n] = \sum_{l=0}^{n_u} b_l u[n-l]$$

となっている場合を考えると、このシステムは、その出力が現在および過去の入力から決まり、過去の出力には依存しないので、非再帰型システムである。

- 例として,

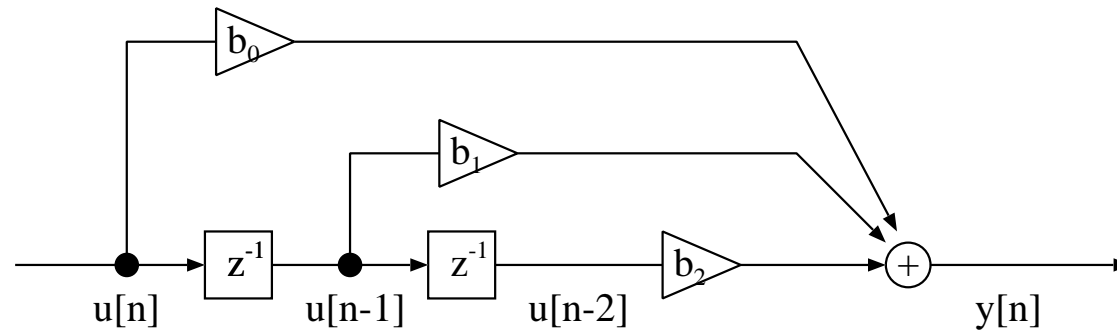
$$y[n] = b_0u[n] + b_1u[n - 1] + b_2u[n - 1]$$

というシステムを考える. このシステムは非再帰型システムである.

- 両辺を z 変換すると以下のようになる.

$$Y(z) = (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2})U(z)$$

- このシステムの入出力関係を図示すると…



- 上記の図からわかるように, 非再帰型システムはフィードバック構造を持たない.

- 次に, 例として,

$$\begin{aligned}y[n] + a_1y[n - 1] + a_2y[n - 2] \\ = b_0u[n] + b_1u[n - 1] + b_2u[n - 1]\end{aligned}$$

というシステムを考える. このシステムは再帰型システムである.

- 両辺を z 変換すると以下のようなになる.

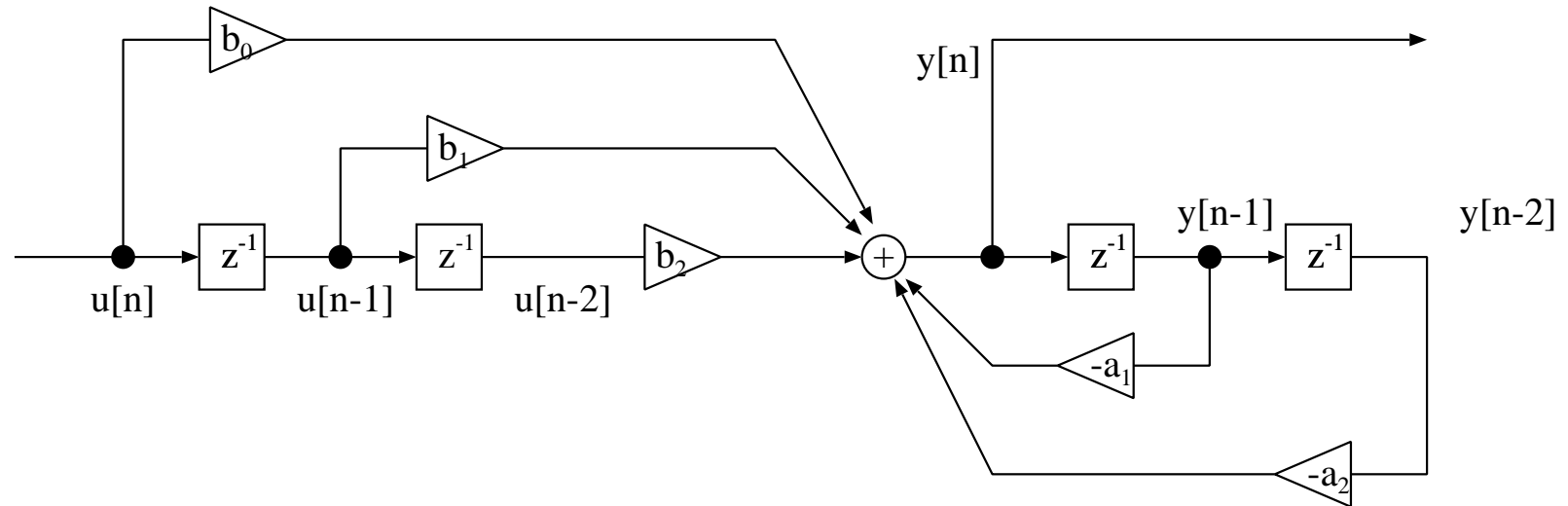
$$\begin{aligned}(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})Y(z) \\ = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})U(z)\end{aligned}$$

- よって,

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}U(z)$$

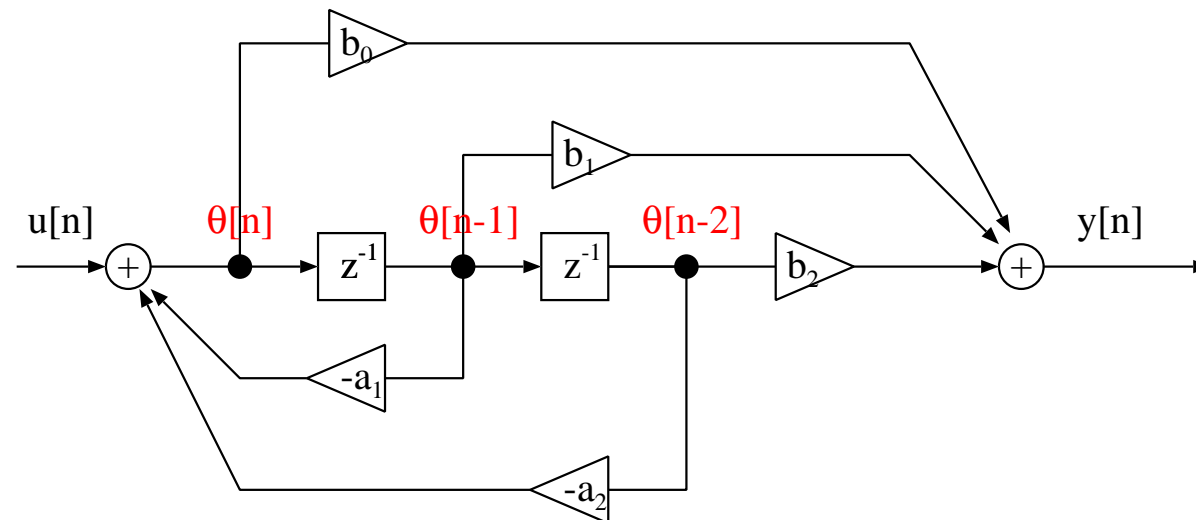
である.

- このシステムの入出力関係を図示すると…



- 上記の図からわかるように、再帰型システムはフィードバック構造を持つ。

- さて, 先ほど示した再帰型システムの図は以下のように変形できる.



- 上記を確認する.

計算の便宜のために新たな変数 $\theta[n]$ を定義しているのだが、これを使うと、

$$\theta[n] = u[n] - a_1\theta[n-1] - a_2\theta[n-2]$$

$$y[n] = b_0\theta[n] + b_1\theta[n-1] + b_2\theta[n-2]$$

となる。

両辺を z 変換すると,

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) \Theta(z) = U(z)$$

$$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) \Theta(z)$$

これらをまとめると,

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} U(z)$$

となり, 先ほどと同一の伝達関数表現が得られる.

- かつてデジタル素子が高価であった時代には、上記のようなブロック線図の書き換えによって素子数を減らすことが応用上重要であったが、今日では、このような書き換えの重要性は低下している。

FIR フィルタと IIR フィルタ

- FIR フィルタは通常は線形時不変で因果的な非再帰型システムの形で実現される。一方、IIR フィルタは通常は線形時不変で因果的な再帰型システムの形で実現される。いずれの場合も、システムに含まれる遅延阻止の最大次数を**フィルタの次数**と呼ぶことが多い。
- これらの利点と欠点は …

- FIR フィルタ

- ▷ 利点: つねに安定で, 安定性に注意して設計する必要がない; 直線位相のフィルタを実現しやすい.
- ▷ 欠点: 過渡域が狭いフィルタを作るためにはフィルタの次数を高くする必要がある.

- IIR フィルタ

- ▷ 利点: FIR フィルタと比べて低い次数で過渡域が狭いフィルタを作ることができる.
- ▷ 欠点: 必ずしも安定にならないので安定性に注意して設計する必要がある; 直線位相のフィルタを実現しにくい.

- 以下では, 非再帰型システムによって構成されたフィルタを**非再帰型フィルタ**, 再帰型システムによって構成されたフィルタを**再帰型フィルタ**と呼ぶことにする.
- 非再帰型フィルタは必ず FIR フィルタになるが...
- 再帰型フィルタは, IIR フィルタになることもあり, FIR フィルタになることもある.

- 厳密には
 - ▷ FIR フィルタ: 非再帰型フィルタと一部の再帰型フィルタ
 - ▷ IIR フィルタ: 残りの非再帰型フィルタ
- 多くのデジタル信号処理の教科書で, FIR/IIR という分類と, 非再帰型/再帰型という分類を混同している.

理想フィルタ

- その周波数特性以下の条件を満たす周波数選択性フィルタを理想フィルタという。
 - ▷ 通過域では振幅一定値で直線位相
 - ▷ 阻止域では振幅零
 - ▷ 過渡域なし

- 有限次元のフィルタによって理想フィルタを実現することは一般には困難.
- 理想フィルタを近似するというというのがフィルタの設計の考え方のひとつ.

周波数選択性フィルタの設計仕様

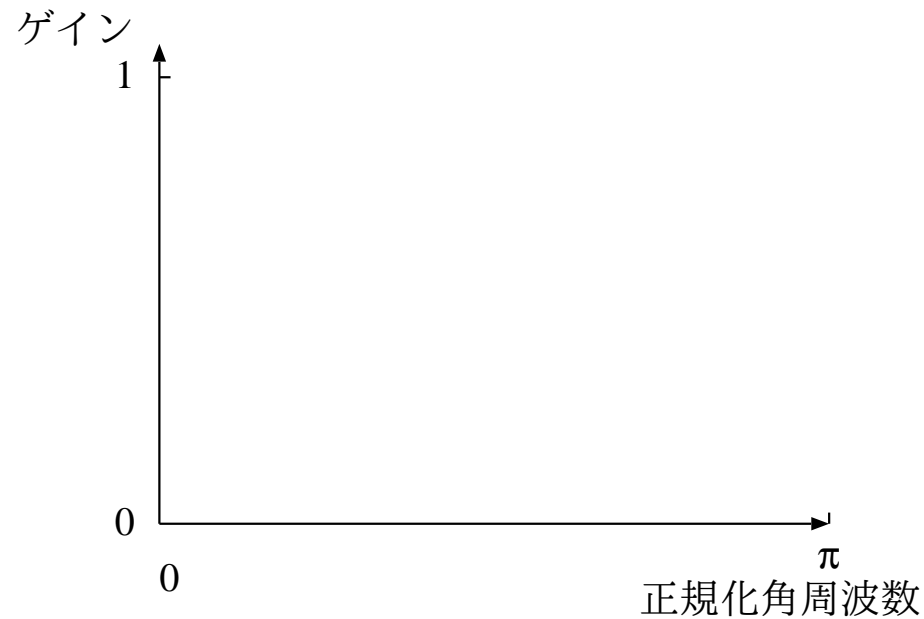
- 樋口 (2021) に従って, 低域通過フィルタを例に取り, 周波数選択性フィルタの設計仕様について述べる.

- 高域通過フィルタ, 帯域通過フィルタ, 帯域阻止フィルタについては, 低域通過フィルタと同様に考えてもよいし, 周波数変換と呼ばれる手法で低域通過フィルタから変換されると考えてもよい (詳細は樋口 (2021)).

- すでに述べたように、理想フィルタは物理的に実現できないので、理想的な特性からどの程度のずれを許容するかという形で設計仕様を与えることを考える。
- 問題になるのは以下の3点である。

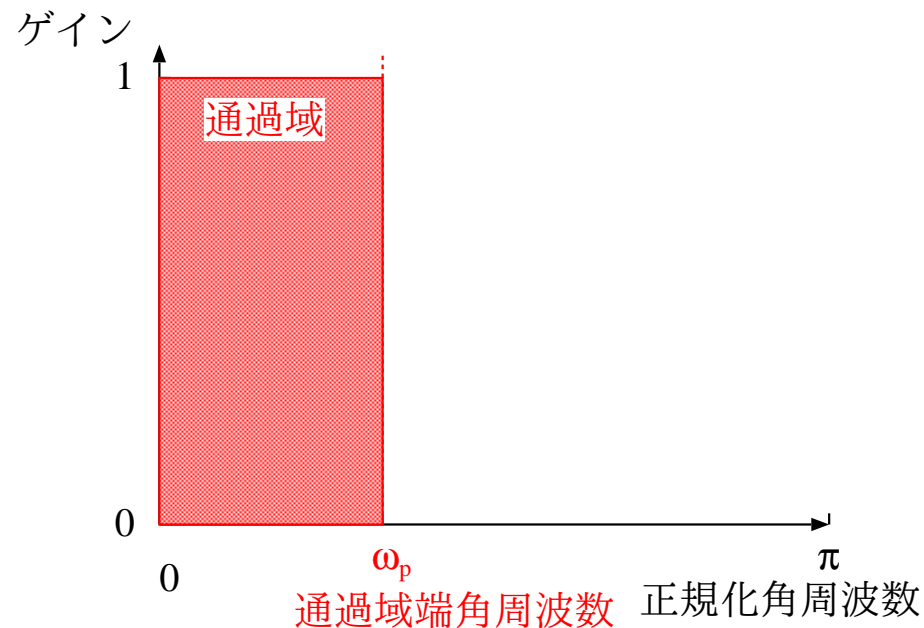
- ▷ 信号を通過させたい領域 (理想的にはゲイン1) で, ゲインが1の付近でどの程度脈動することを許すか
- ▷ 信号を遮断したい領域 (理想的にはゲイン零) で, どの程度までのゲインを許容するか
- ▷ 特性を指定しない領域 (遷移領域) をどの程度取るか

- 以下では, 正規化角周波数領域 $[0, \pi)$ において低域通過フィルタの設計仕様を与える.



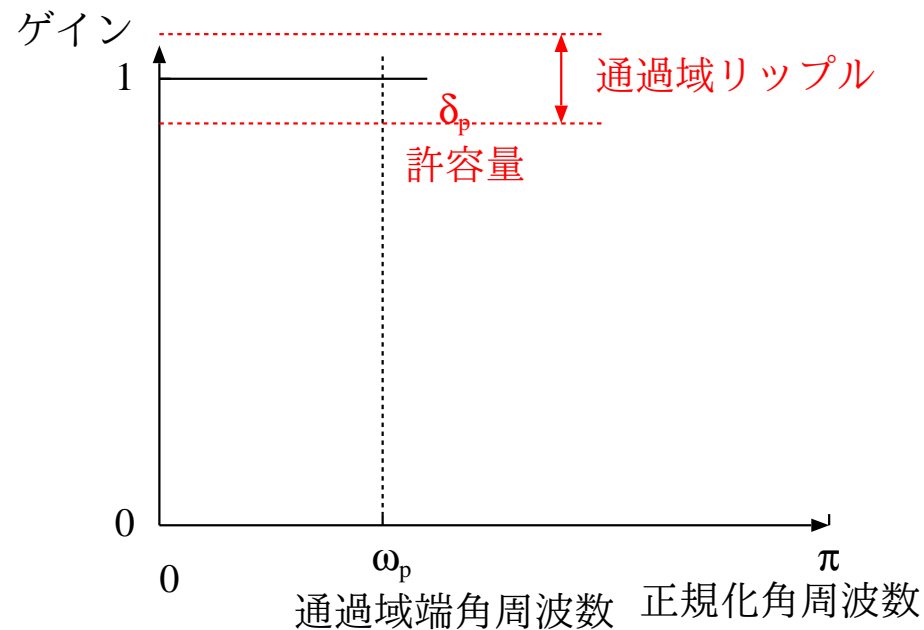
- 以下で設計仕様に関連した用語を定義する。設計仕様はこれらのいくつかを使って指定される。
- 低域通過フィルタなので、その周波数特性は周波数に関する偶関数であることを前提とし、負の周波数では仕様を与えない。

- 信号を通過させたい帯域を, $\omega \in [0, \omega_p]$ とする. この帯域を**通過域**と呼ぶ. ω_p を**通過域端周波数**と呼ぶ.

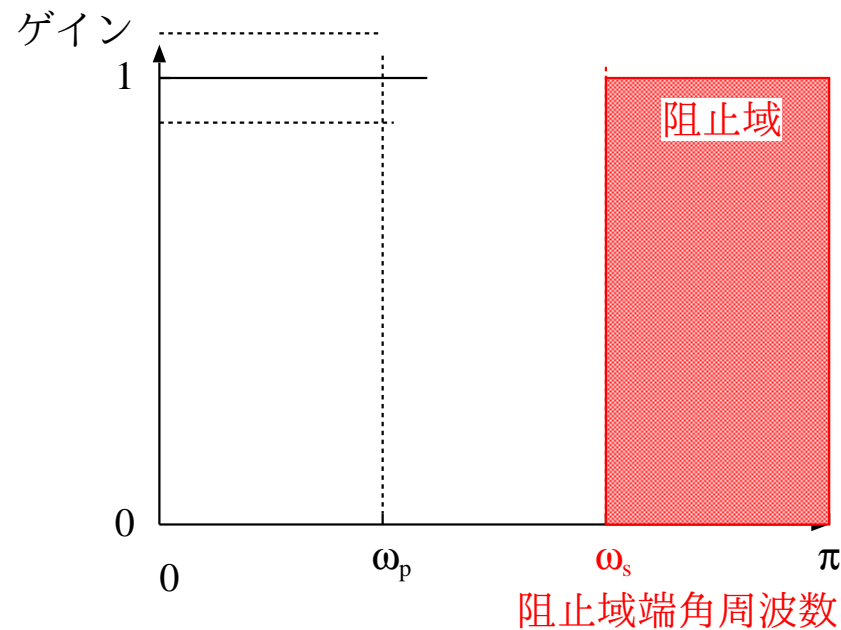


- 通過域では, 振幅特性 $A(\omega)$ がちょうど1であることが理想であることを踏まえ, $1 - \delta_p \leq A(\omega) \leq 1 + \delta_p$ という仕様を与える.

- δ_p を通過域の許容量, 振幅特性が $1 \pm \delta_p$ の許容範囲を通過域リップルと呼ぶ.

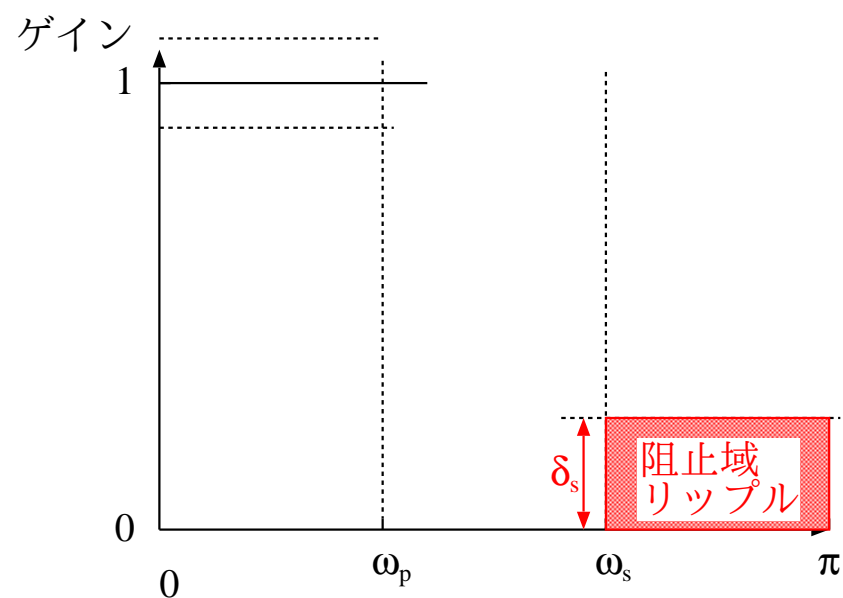


- 信号を遮断したい帯域を, $\omega \in [\omega_s, \pi)$ とする.
この帯域を**阻止域**と呼ぶ. ω_s を**阻止域端周波数**と呼ぶ.

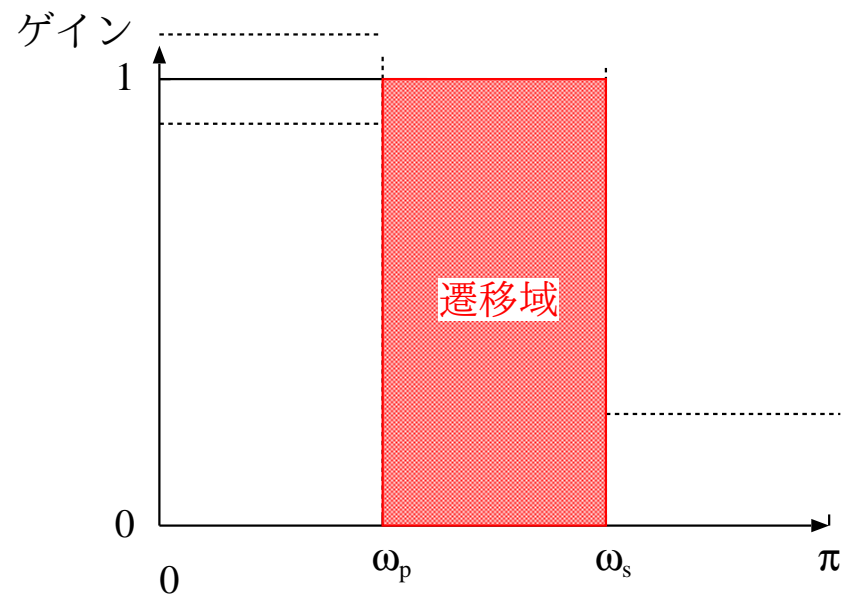


- 阻止域では, 振幅特性 $A(\omega)$ がちょうど零であることが理想であることを踏まえ, $A(\omega) \leq \delta_s$ という仕様を与える.

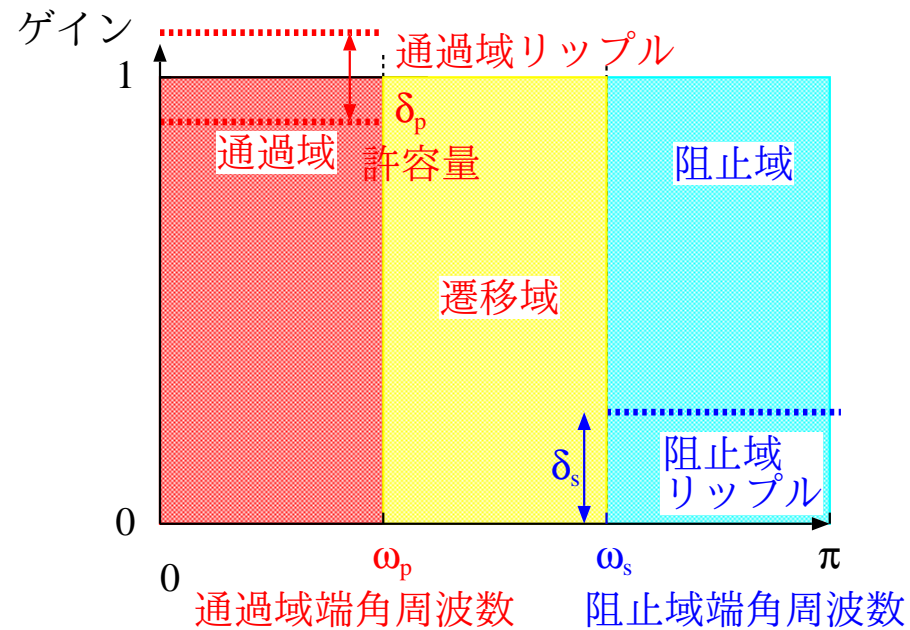
- 振幅特性が δ_s 以下の許容範囲を **阻止域リップル** と呼ぶ.



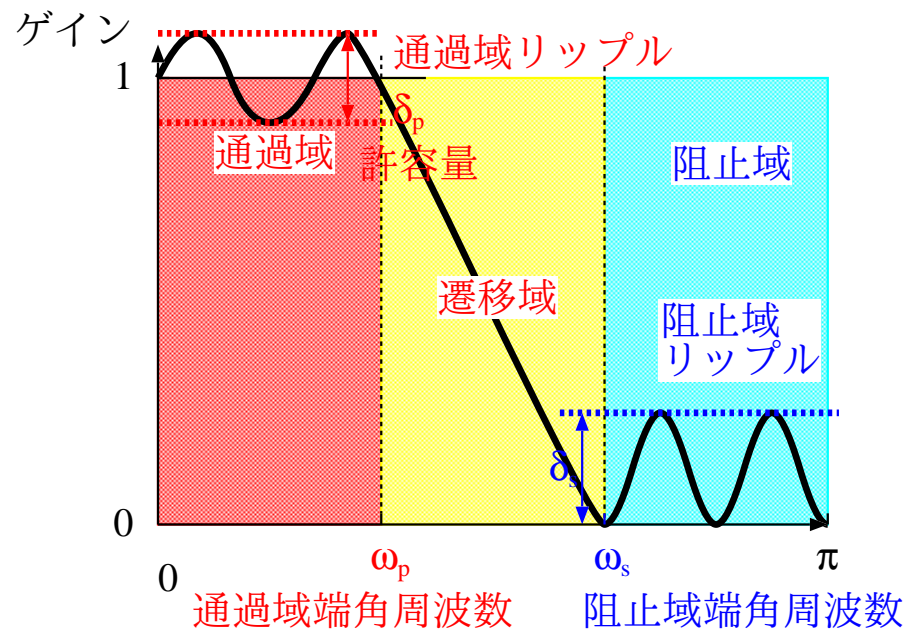
- 特性を指定しない $\omega \in (\omega_p, \omega_s)$ の領域を遷移域と呼ぶ.



- 以上をまとめて図に示す.



- 与えられたフィルタ長に対して、理想的な特性を近似するフィルタを設計し、設計したフィルタが仕様を見たせば設計完了である。



- 振幅特性の最大値を A_{\max} としたとき,
 $A(\omega_c)/A_{\max} = 1/\sqrt{2}$ となる最小の正の ω_c
を**遮断周波数**と呼ぶ(が, 通過域リップルの
値次第ではおかしな値になり得る). 遷移領
域のない理想フィルタでは通過域と阻止域の
境界を指すためにこの言葉が使われることも
ある.

- 続いて、縦軸に関連して、仕様で与える数値について説明する.

- $-20 \log_{10} A(\omega)/A_{\max}$ を ω における減衰量と呼ぶ. 単位は dB である.
- フィルタでは上記のように全体にマイナスを掛けるのが慣例だが, 増幅器ではマイナス記号を掛けないのが慣例である.

- 先に述べた $1 \pm \delta_p$ ではなく

$$-20 \log_{10}(1 - \delta_p)/(1 + \delta_p)$$

の方を**通過域リップル**と呼ぶこともある.

- $-20 \log_{10} \delta_s/(1 + \delta_p)$ を**阻止域減衰量**と呼ぶ.

- 実は、デシベルを単位にするときには、10 を乗
ずる場合と 20 を乗ずる場合が混在している.
- これは、電力ゲインを

$$\frac{\text{出力電力}}{\text{入力電力}}$$

と定義したことに由来する.

- 「デシ」 (deci) の意味は 1/10 であり, これを受けて, 電力ゲインをデシベル単位で読むときには

$$10 \log_{10} \frac{\text{出力電力}}{\text{入力電力}}$$

としたのであるが...

- 回路では電力は電圧の 2 乗に比例するので、電圧に基づいてゲインを計算するときには、

$$20 \log_{10} \frac{\text{出力電圧}}{\text{入力電圧}}$$

となる。

- 転じて、物理的意味が不明瞭な場合にも、

$$20 \log_{10} \frac{\text{出力絶対値}}{\text{入力の絶対値}}$$

が使われることが多い。

フィルタの仕様の与え方

- **絶対仕様**と呼ばれる仕様では, 以下の値をフィルタの性能の数値目標として設定する:
通過域端周波数 ω_p , 通過域リップル δ_p , 阻止域端周波数 ω_s , 阻止域リップル δ_s

- フィルタの**相対仕様**と呼ばれる仕様では, ω_p と ω_s の値を数値目標として設定することは絶対仕様と同じであるが, δ_p の値のかわりに $-20 \log_{10}(1 - \delta_p)/(1 + \delta_p)$ の値を, δ_s の値のかわりに $-20 \log_{10} \delta_s/(1 + \delta_p)$ の値を数値目標として設定する.

直線位相

- 振幅特性が一定の線形時不変フィルタに複数の正弦波が重ね合わされた信号を通したとき、縦方向の伸縮出力および時間のずれを除き、入力波形と出力波形が同一になるための条件を考える。

- 議論の簡単のため, フィルタの振幅特性が全周波数で一定値 A , 位相特性が $\theta(\omega)$ であるものとする.
- 天下りの的であるが, $\theta(\omega) = a\omega + b$ (a, b は実数) となっていたものとする.
- 入力を $\sum_{k=1}^L c_k e^{j\omega_k n}$ とすると, 出力は …

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^L Ac_k e^{j\omega_k n} e^{j\theta(\omega_k)} &= \sum_{k=1}^L Ac_k e^{j\omega_k n} e^{j(a\omega_k + b)} \\ &= Ae^{jb} \sum_{k=1}^L c_k e^{j\omega_k (n+a)}.\end{aligned}$$

- $\theta(\omega) = a\omega + b$ となっていれば, 出力は, 入力を時間軸に関して $-a$ ずらし, かつ全体にある複素数 Ae^{jb} を乗じたものになるため, 入力と出力は「波形」という観点では相似形である.
- $\theta(\omega) = a\omega + b$ となっていることと $\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = a$ であることは等価だから (b の値は重要でない) ...

- 信号を線形時不変フィルタに通したとき波形が歪まないための十分条件は、 $\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$ が ω によらず一定値になることである。
- $\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$ を **群遅延** という。また、群遅延が ω によらず一定であることを **直線位相** (あるいは**線形位相**) という。このとき $\theta(\omega) = a\omega + b$ となることから、直線位相という言葉を使う理由は明らかであろう。

- たとえば矩形波 (を帯域制限の範囲で近似したもの) をフィルタに通した場合, 矩形波の近似は多くの周波数成分を含むが, フィルタが直線位相でない場合には, 各周波数成分が時間軸方向にばらばらにずれるため, 波形自体が歪む. このような現象を位相歪みという.

- 直線位相のフィルタではこのような現象は顕著ではない。このため、波形自体に重要な情報が含まれる場合には、直線位相を実現することが重要となる。
- とはいっても、現実的には、振幅特性を一定にすることは困難なので、直線位相を実現しても、振幅特性の周波数依存性のために、波形は歪む。

- 応用上取り扱いやすいのは非再帰型フィルタなので, 因果的な非再帰型フィルタによって直線位相が実現できるかという問題を考える.
- 次数 N の非再帰型フィルタ (FIR フィルタ) が次のような入出力関係を持つものとする:

$$y[n] = \sum_{l=0}^{N-1} h[l]u[n-l].$$

ただし, u は入力, y は出力である.

- このフィルタが**一般化された意味**で直線位相となるための十分条件は、 $k \in \{0, \dots, N-1\}$ としたとき、次のいずれか一方が満たされることである。

- ▷ $\forall k, h[k] = h[N-1-k]$
(**偶対称**と呼ぶ)

- ▷ $\forall k, h[k] = -h[N-1-k]$
(**奇対称**と呼ぶ)

- 「一般化された意味で直線位相」とは、位相が $\pm\pi$ 不連続に変化すること (波形の上下反転) を許容するという意味である。この言葉は Oppenheim & Schaffer, 2010 で使われている。条件を緩めない「直線位相」は、以下で述べる方法では必ずしも実現できない。

- 非巡回型フィルタの係数 h が偶対称あるいは奇対称になっていると仮定する.
- N が奇数のときは, $C = (N - 1)/2$ とおき, 以下のように定義する.

$$\triangleright a_0 = h[C],$$

$$\triangleright a_k = 2h[C - k] \quad (1 \leq k < C).$$

- N が偶数のときは, 次のように定義する.

$$b_k = 2h[N/2 - k], \quad 0 \leq k < N/2.$$

- このフィルタの周波数特性を $H(\omega)$, 一般化された振幅特性を $\Gamma(\omega)$, 一般化された位相特性を $\psi(\omega)$ とすると, このフィルタは一般化された意味で直線位相: $\psi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + b$ となる. $\Gamma(\omega)$, b の値は以下の通り.
- 「一般化された振幅特性」は振幅特性に正負の符号をつけたものである. $H(\omega) = A(\omega)e^{j\theta(\omega)} = \Gamma(\omega)e^{j\psi(\omega)}$ で, $A(\omega) = |\Gamma(\omega)|$ で, $\Gamma(\omega) \geq 0$ な

ら $\theta(\omega) = \psi(\omega)$ だが, $\Gamma(\omega) < 0$ なら $\theta(\omega) = \psi(\omega) \pm \pi$ である ($\pm\pi$ の正負は議論に都合が良いように付ける).

(タイプ 1) N が奇数, h が偶対称のとき:

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=0}^{(N-1)/2} a_k \cos(\omega k), \quad b = 0$$

(タイプ 2) N が偶数, h が偶対称のとき:

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=0}^{N/2} b_k \cos(\omega(k - \frac{1}{2})), \quad b = 0$$

(タイプ 3) N が奇数, h が奇対称のとき:

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=0}^{(N-1)/2} a_k \sin(\omega k), \quad b = \frac{\pi}{2}$$

(タイプ 4) N が偶数, h が奇対称のとき:

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=0}^{N/2} b_k \sin(\omega(k - \frac{1}{2})), \quad b = \frac{\pi}{2}$$

証明 (1)

- フィルタの周波数応答が次式によって与えられることに注意する.

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]e^{-j\omega k}$$

証明 (2) N が奇数で h が偶対称のとき

- フィルタのインパルス応答は $k = C$ を中心とした偶関数である.
- $k = C$ を中心としてフィルタの周波数応答を書き直すと, 次ページのようになる.

$$H(\omega) = e^{-j\omega C} \left(h[C] + \sum_{k=1}^C h[C - k] (e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}) \right)$$
$$= e^{-j\omega C} \left(a_0 + \sum_{k=1}^C a_k \cos(\omega k) \right)$$

- これを書き直すと ($C = (N - 1)/2$ と $\cos 0 = 1$ に注意), 以下のようなになる.

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} a_k \cos(\omega k)$$

$$\psi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

証明 (3) N が奇数で h が偶対称のとき

- $C = (N - 1)/2$ とする. フィルタのインパルス応答は $k = C$ を中心とした偶関数であるが C は整数ではない.
- $k = C$ を中心としてフィルタの周波数応答を書き直すと, 次ページのようにになる.

$$H(\omega) = e^{-j\omega C}$$

$$\times \left(\sum_{k=1}^{C+\frac{1}{2}} h\left[C - k + \frac{1}{2}\right] \left(e^{j(\omega(k-\frac{1}{2}))} + e^{-j(\omega(k-\frac{1}{2}))} \right) \right)$$

- $C + 1/2 = (N - 1)/2 + 1/2 = N/2$ を使うと

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \\
 &\times \left(\sum_{k=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - k\right] \left(e^{j(\omega(k-\frac{1}{2}))} + e^{-j(\omega(k-\frac{1}{2}))} \right) \right) \\
 &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{N/2} b_k \cos(\omega(k - 1/2)) \right)
 \end{aligned}$$

- したがって

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k \cos \left(\omega \left(k - \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$\psi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

証明 (3) N が奇数で h が奇対称のとき

- フィルタのインパルス応答は $k = C$ を中心とした奇関数である。したがって、 $h[C] = 0$ である。
- フィルタの周波数応答を $h[C] = 0$ に注意しつつ $k = C$ を中心として書き直すと次ページのようにになる。

$$H(\omega) = e^{-j\omega C} \left(h[C] + \sum_{k=1}^C h[C - k] (e^{j\omega k} - e^{-j\omega k}) \right)$$
$$= e^{-j\omega C} \left(\sum_{k=1}^C j a_k \sin(\omega k) \right).$$

- $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ を利用して先の式を整理すると, ($C = (N - 1)/2$ に注意),

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} a_k \sin(\omega k)$$

$$\psi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2}$$

証明 (4) N が奇数で h が奇対称のとき

- $C = (N - 1)/2$ とする. フィルタのインパルス応答は $k = C$ を中心とした偶関数であるが C は整数ではない.
- $k = C$ を中心としてフィルタの周波数応答を書き直すと, 次ページのようにになる.

$$H(\omega) = e^{-j\omega C} \times \left(\sum_{k=1}^{C+\frac{1}{2}} h\left[C - k + \frac{1}{2}\right] \left(e^{j(\omega(k-\frac{1}{2}))} - e^{-j(\omega(k-\frac{1}{2}))} \right) \right)$$

- $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ と $C + 1/2 = (N - 1)/2 + 1/2 = N/2$ を使うと, 次ページの式が得られる.

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \\
&\times \left(\sum_{k=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - k\right] \left(e^{j(\omega(k-\frac{1}{2}))} - e^{-j(\omega(k-\frac{1}{2}))} \right) \right) \\
&= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} j \left(\sum_{k=1}^{N/2} b_k \sin(\omega(k - 1/2)) \right)
\end{aligned}$$

- したがって,

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k \sin \left(\omega \left(k - \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$\psi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2}$$

フィルタの設計法について

- 多くの場合, 設計すべきフィルタは線形時不変かつ因果的で, 有限次元である.
- フィルタの設計法は色々あり, 非再帰型フィルタの設計法のひとつは窓関数を用いる方法で, 再帰型フィルタの設計法にはインパルス不変法や双一次変換などといった方法がある.

- デジタルフィルタでは、コンピュータに設計仕様やパラメータを与えて、望ましい特性を近似的に実現するフィルタを数値計算によって求めることが一般的.
- この実験では Scilab の `eqfir` という関数を用いてデジタルフィルタの係数を数値的に求める. 手順については「デジタルフィルタ実験の手順」を参照.